June 2007 MATHEMATICAL SCIENCES Number 528



# 物理学における位相

青木 秀夫

## 1. はじめに

**P**「『位相』の総論をしなくちゃならないんだよ.」

**S**「位相といえば，波動関数は絶対値と位相からなりますね.」

**P**「それで済めば話は簡単なんだがね．そもそも，日本語で位相と言ったときには，実は2つのことを指すのが厄介だ．つまり，数学的に**位相**と言ったときにまずはイメージするのは，英語で言えば**topology**というやつで，定義口調で言えば『極限や連続の概念が定義できるように，集合に導入される数学的構造』だな．それから，物理でよく使われるのは，英語で言えば**phase**というやつで，『振動・波動のような周期的現象において，着目する時刻・場所において，振動がどの段階にあるかを示す変数』だ．この後の話の都合上，様々な概念の間の相関図（図1）を掲げておこう，この意味はおいおい分かってくる.」

**S**「なるほど，波動関数の位相はphaseのほうで，

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=|\Psi(\boldsymbol{r},t)|e^{i\theta(\boldsymbol{r},t)}$$

と書いたときの $\theta(\boldsymbol{r},t)$ のことですね．しかし，ちょっと変だな，量子力学の教科書には，『磁場など時間反転対称を破るものがなければ，定常状態の波動関数は常に実にとることが可能』，と書いてありますね.」

**P**「定常でも状態に縮退があれば，縮退状態の線形結合の取り方の自由度を利用して複素にできる．そうしなくても構わないけれど，電子の平面波のように，電流が流れている状態を作りたければそうせざるを得ないね，実際電流 $\boldsymbol{j}$ は

$$\boldsymbol{j}\propto\nabla\theta$$

だから，波動関数が複素の場合しか生じない．

ここでちょっと面白い例をあげてみようか．物理で，メゾスコピック系とかナノ構造と呼ばれる，微視的サイズと巨視的サイズの間のサイズをもつ系の物理が最近良く調べられている．このような系では，波動関数の位相が系全体にわたって保た

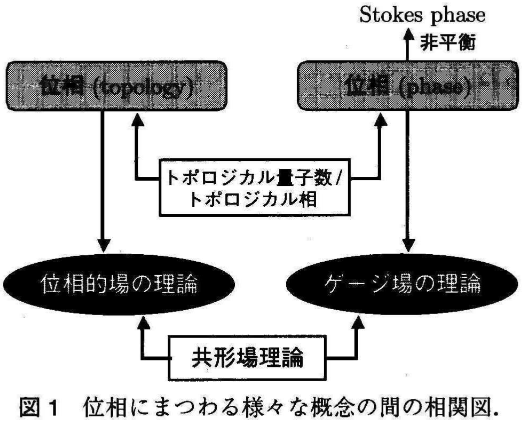



**図1** 位相にまつわる様々な概念の間の相関図.

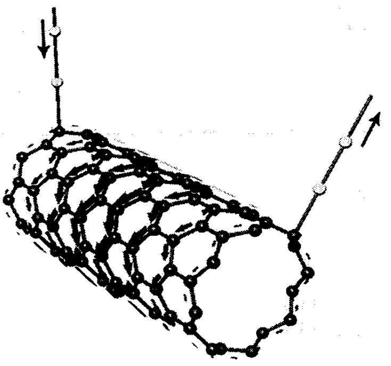


**図2** 炭素ナノチューブに電極をつけ，電流を流すと，波動関数の位相の干渉効果により，チューブを回る電流が流れ得る[1]．

れることが多いので，波動関数の位相の効果の宝庫のようなものだ．一つの例は，炭素からなるシリンダー状の構造があって，炭素ナノチューブ (nanotube) と呼ばれている．平面波が右向きと左向きに走り得るのと同様，このチューブでは，チューブの円周を，ある軸方向から見たときに，時計周りに回る波の状態と，反時計周り状態とが縮退している（図 2）．この系に，電極を付けて，チューブの一方の端から他方の端まで電流を流すと，量子力学的位相の干渉効果が生じて，流した電流とは直交するような，チューブの円周方向に巨大な（軸方向電流より桁違いに大きい）電流が流れ得ることが理論的に示されている[1]．いわば分子ソレノイドだ．これも，波動関数の位相の効果だ．

また，定常状態に限らず，一般に時間依存する問題（ハミルトニアンが時間依存するとか，ハミルトニアンは定常だが非平衡状態を考えるとか）を考えると，必然的に複素になるね，時間依存 Schrödinger 方程式 $i\hbar(\partial/\partial t)\Psi(t) = \mathcal{H}(t)\Psi(t)$ が $i$ を含むからね．」

**S**「そういえば，実数から複素数への拡張だけで良いのでしょうか，グラスマン数とかいうのもありましたね．」

**P**「あれは，本来は場の演算子で表すべきフェルミオンの非可換性を数として表す便法だよ．それよりは，non-Abelian 位相というものも考えられて，これはいわば位相 $\theta$ が普通はスカラーなのを，行列に拡張したようなもので，特殊な数と言えないこともない．

位相をもっと一般的に捉えれば，ゲージ場理論ということになるが，ゲージ場理論で，'t Hooft, Politzer, Gross and Wilczek によって 1970 年代に non-Abelian ゲージ理論が出たのは画期的だった．後で説明する，**接続 (connection)** としての位相にも non-Abelian バージョンがあるんだね．」

**S**「**Berry の位相**というのも良く聞きますね[2]．」

**P**「そう，幾何学的位相というやつだね．」

**S**「あれは何故『幾何学的』というのですか．」

**P**「君の出した，$\Psi(\boldsymbol{r},t) = |\Psi(\boldsymbol{r},t)|e^{i\theta(\boldsymbol{r},t)}$ という位相は，定常状態に対しては露に $\theta(\boldsymbol{r},t) = -(E/\hbar)t$ （$E$ は固有エネルギー）と与えられるように，運動方程式（今の場合 Schrödinger 方程式）で完全に与えられる．これは履歴には依らない．ところが，本当に時間依存の問題，例えばハミルトニアンがパラメータに依存していて，このパラメータが時間的に変化するとしよう．すると，たとえ $Et$ を，各瞬間でのハミルトニアンの固有値の時間積分で置き換えても，余分なファクター $\exp(-i\int_0^t \langle\Psi|\dot{\Psi}\rangle dt)$ が残る．

実は，ここら辺は，数学的にはベクトル束 (vector bundle) という考えですっきり理解できる．波動関数というのは，一般的にはヒルベルト空間のベクトルだ．ハミルトニアン $\mathcal{H}(C)$ が何かのパラメータ $C$ に滑らかに依存し，$C$ が時間的変化するとき，このベクトル束の変化を追わなければならない．これは一般には複雑だけれど，パラメータの時間的変化が十分ゆっくりな場合は，『断熱定理』というのがあって，波動関数の絶対値は不変で，位相のみが変化する．ただし，その位相は，パラメータがパラメータ空間の中でどのような軌跡で動くかに依るので，先ほどの力学的位相と区別して，幾何学的位相と言っている．これが Berry の位相だ．数学的には，系を断熱変化させるということは，ベクトル束を位相空間上で『平行移動』することに対応して，様々な平行移動は一種の群をなす（図 3）．これは位相幾何学ではホロノミー (holonomy) と呼ばれている．ホロノミーについては，本特集号では倉辻氏により解説されている．

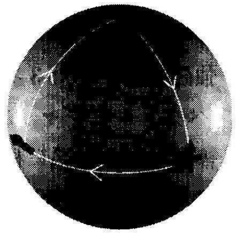
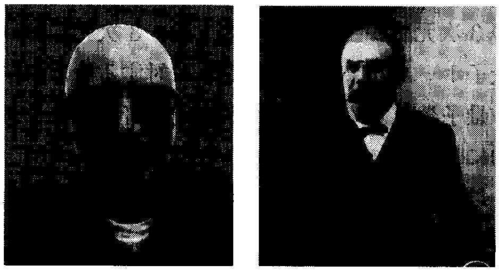


**図3**　曲面上でのベクトルの平行移動.



(a)　　　(b)

**図4**　(a) ベリー (Michael Berry) (http://www.phys.bris.ac.uk/people/berry_mv/index.html. より本人の許可を得て掲載). (b) ポアンカレ (Henri Poincaré, 1854–1912).

ここで, Berry の写真を掲げておこう (図 4 (a))[3]. 並べて, topology を象徴する数学者の一人として, Poincaré の写真も掲げておこう (図 4 (b)). 最近彼の予想が解決して話題になったりしたからね.」

**S**「Berry の位相は量子力学でしょうけれど, 波動関数の位相そのものは量子力学の専売特許じゃないですよね.」

**P**「それはそうだ. 振動・波動は元々古典力学の概念だ. 光もそうだけれど, 実はちょっと微妙だ. 以前に, 光に Berry 位相効果がある, という実験や理論が出て, 光波は Maxwell 方程式で記述される電磁場なので, 量子力学に基づく Berry の位相と解釈できるはずがない, という議論があった[4]. だけれども, 考えてみると, 波動関数 $\Psi$ を絶対値と位相に分けて書いたとき, 位相は実は作用 $S$ だね, これは量子力学の初歩で習う. Landau–Lifshitz の教科書で言えば, quasi-classical case という章だ. 実際, 非常に大雑把に言って, 経路積分的に考えれば, $\Psi(\boldsymbol{r},t)=\left[\sum_{\rm path} e^{iS({\rm path})}\right]\Psi(\boldsymbol{r}_0,t_0)$ ($S$(path) は各経路上での作用, $(\boldsymbol{r}_0,t_0)$ は出発点) となって, 古典近似したければ, 経路の和の代わりに, $S$ の停留値を与える経路 (古典的軌跡) をとればよい. 波動光学の場合も, 媒質の性質 (屈折率など) が空間的にゆっくり変わる場合には, 光波の伝播を記述する方程式を立てれば, それは微分方程式として Schrödinger 方程式と似たような形になり, 特に光には偏光という内部自由度があるから, 並行移動の際の接続として Berry の位相が出てくる, という構造だ. 本特集では小野田氏により詳しく解説されている.

また, 経路積分に関しては, 量子力学で『量子異常』という面白い性質がある. この量子異常を経路積分で定式化することもできるが, これについては本特集では藤川氏により詳しく解説されている.」

## 2. トポロジカル量子数

以上で位相を概観したが, 個々のテーマについてもう少し詳しく眺めてみよう. まず, 位相には topology と phase があると言った. 量子状態は一般に量子数をもつが, この中に, **トポロジカル量子数**と呼ばれるものがあり[5], これと波動関数の phase と関連する. 普通の量子数は波動関数の詳細にもちろん依るが, トポロジカル量子数では詳細に依らない. 最も簡単な例が, Dirac による磁荷の量子化で, もし磁荷 (magnetic monopole) があったときに, 電磁場 ($U(1)$ ゲージ場) 入りの Schrödinger 方程式を解くと, 波動関数が一価 (空間内の任意の閉じた曲線に添って波動関数の位相をたどると, 一周後 $2\pi$ の整数倍になる) の必要があり, このために磁荷 (と電荷の積) が量子化していることが分かる. 別の典型例は, 超流動体, 超伝導体, Bose 凝縮体において波動関数が巨視的にコヒーレントな位相をもっている場合である. このときやはり任意の閉じた曲線に添った波動関数の位相変化は $2\pi$ の整数倍 $n$ でなければならない. これらがトポロジカル量子数の最も簡単な例となる. 逆に ($n$ はゼロでない整数値をとれるか

ら)，超流動体，超伝導体，Bose 凝縮体においては渦（vortex）というトポロジカル励起が許されることが分かる．Bose 凝縮については本特集では上田氏により詳しく解説されている．

また，ベクトル束の接続という観点から，トポロジカル不変量を構成することもできる．トポロジカル不変量は，場の理論においてよく出てくるものであり，上記の量子化された磁荷や渦度（vorticity）もその例であるが，固体物理において，空間2次元の系に対して顕著な例がある．量子ホール効果である．量子ホール効果は，2次元空間を走る電子に，2次元面に垂直に磁場をかけた系で起きるが，Thouless 等[6]が示したように，線形応答理論によるホール伝導度 $\sigma_{xy}$ の表式は，系が周期的だとして磁気 Brillouin 帯上で平均すると，$e^2/h$（$e$: 素電荷，$h$: プランク定数）を単位として

$$\langle\sigma_{xy}\rangle = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\alpha}\iint\left(\left\langle\frac{\partial\Psi^{\alpha}}{\partial A_x}\middle|\frac{\partial\Psi^{\alpha}}{\partial A_y}\right\rangle - \left\langle\frac{\partial\Psi^{\alpha}}{\partial A_y}\middle|\frac{\partial\Psi^{\alpha}}{\partial A_x}\right\rangle\right)dA_x dA_y$$

で与えられる．ここで $\Psi^{\alpha}$ は $\alpha$ 番目の固有関数，$\boldsymbol{A}=(A_x,A_y)$ はベクトル・ポテンシャルであり，被積分関数は，$A_x, A_y$ を変化させたときに波動関数（ベクトル束）がどう変化するかに関する**曲率**になっていて，その積分は，丁度「ガウス・ボンネ（Gauss–Bonnet）の定理」において，曲面上で曲率を積分すると整数（オイラー数）になるのと同様整数（微分幾何学で言うところの第一チャーン指数（first Chern character)）となる．

Thouless 等がこれを具体的に示したのは，単純な2次元系ではなく，2次元に周期性（結晶格子の周期性や，周期的外部ポテンシャル）を加えた場合に対してである．このとき，ランダウ量子化とブラッグ反射の干渉により，各ランダウ準位の内部に細かいギャップが自己相似的に開き，エネルギー・スペクトルはフラクタルになり，Hofstadter の蝶と呼ばれている．このとき，分裂したバンド一つ一つが量子ホール伝導度（トポロジカル量子数）を担っている．

量子ホール効果は，普通は2次元特有な現象である．しかし，実は，3次元空間における量子ホール効果も可能なことが理論的には示唆されている．このためには，強磁場をかけた3次元系において，エネルギー・スペクトルにギャップが開くことが必要となる[7]．普通は3次元系に磁場をかけても，ギャップは開かないが，もし3次元系に周期性を加えれば，磁場の異なる成分（例えば $xy$ 面に垂直な成分と $yz$ 面に垂直な成分）に対するランダウ量子化の干渉が起きることにより Hofstadter 蝶の3次元版が生じる．このとき，3次元における量子ホール効果が生じ，これに対するトポロジカル量子数を求め得ることが最近越野等により理論的に見出されている[8]．

以上のようなトポロジカル量子数により特徴付けられる相を，トポロジカル量子相と呼ぶことがある．本特集では押川氏により解説されている．面白いのは，「トポロジカル相（例えば分数量子ホール液体）では基底状態が素励起の性質まで規定してしまう」という著しい特徴があり，これは分数量子ホール系では素励起が分数統計粒子であることに反映される．

## 3. 分数量子ホール効果における位相と位相的場の理論

波動関数の位相という観点からすると，空間2次元というのは特に面白い．というのは，波動関数を規定する群そのものが普通の3次元の場合と違ってしまう．空間3次元の場合は，同種粒子を交換したとき波動関数は $\Psi(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)=e^{i\theta}\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$ のように位相が変わり，もう一度交換すれば元に戻るので $\theta=0,\pi$ であり，前者がボゾン，後者がフェルミオンに対応する．数学的には粒子の配置は**置換群**で分類でき，その既約表現がフェルミオンやボゾンを表した．一方，2次元空間では，多粒子系の世界線（位置座標 + 時間における粒子の軌跡）は図5のように一般に絡み合った紐の集まりとなり，この絡みを連続変形で解くことはできない，という点が大いに違う．このときは粒子

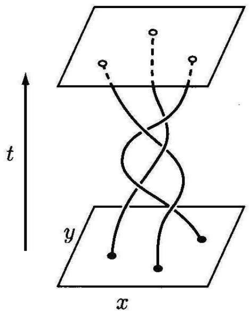



**図 5** 2 次元空間における多粒子の世界線.

の配置は履歴をひきずることになり，これを規定するのは置換群ではなく，**組み紐（braid）群**である．この群の既約表現は，フェルミオンやボゾンだけでなく，後述の分数統計粒子（anyon）も含む．

この組み紐間の巻き数は保存量となり，数学的には，波動関数の位相をホモトピー（homotopy）により分類できる．これをラグランジアンで言えば，Chern–Simons（チャーン・サイモンズ）場というゲージ場を用いて，**トポロジカル項**と呼ばれる項をラグランジアンに加えることに当たる[9]．

分数量子ホール効果では，2 次元空間を外部磁場中で走る電子を考えるが，実際これを Chern–Simons ゲージ場の理論で扱うことができる．磁場中でも勿論電子は強く斥力相互作用しているから，分数量子ホール効果は「強い電子相関」の問題となるが，量子ホール効果は 2 次元空間で起きるものであり，この空間次元特有のゲージ場の振舞いが，「複合粒子」などの直観的な描像を可能にする．ここで現れた Chern–Simons 場というのは，数学的にはベクトル束の微分幾何学に出てくる概念で，空間の計量に依らないある外微分形式で表されるので，トポロジカルな場と呼ばれる．

分数量子ホール効果（その詳細は文献 10) を参照）に対するこのような場の理論の一つの帰結は，分数量子ホール状態は複合ボゾンの Bose 凝縮状態と見なせ，ある種のゲージ対称性破れ状態ということである．ただし，そこで立っている秩序は，流石に 3 次元 Bose 凝縮のような長距離秩序ではなく，(2 次元で許される中では最も長距離的な) 巾型相関となる．面白いことに，そもそもこの秩序は電子間斥力相互作用から生じたにも関わらず，この巾的相関の指数は相互作用の大きさには依らず，導入するトポロジカル項の係数のみに依る．このためこの秩序はトポロジカルな秩序とも呼ばれる．

基底状態がこのようなトポロジカル状態であると，それからの励起が，anyon という分数統計粒子になる．したがって，系の性質（現れる粒子の統計性など）は，ハミルトニアンを見た瞬間に必ずしも分かるのではなく，基底状態を参照して決まるものである，という意味で，一種の dynamical symmetry になっている．また，Chern–Simons 理論の枠組みは，**共形場の理論**とカップルさせることもできて，分数量子ホール効果ではそれも議論されている．

さて，分数量子ホール系の有効理論は，Chern–Simons ゲージ場であると言ったが，正しく言うとこれは平均場レベルでのみ成り立つ．それでは，『逆問題』を考えたらどうだろうか．分数量子ホール状態を表す試行状態として Laughlin によって手で構成された状態がある．この Laughlin 状態は，色々な書き方があり，第一量子化では，

$$\Psi_{\nu=1/q} \propto \prod_{i<j}(z_i - z_j)^q \tag{1}$$

（ここで $\nu$ はランダウ準位占有率，$q$ は奇数，$z = x + iy$ は各電子の複素座標）という風に表される．露な「複合ボゾンの凝縮状態」としては，

$$\Psi_{\nu=1/q} \propto \left(\int d^2 z\, \Psi^\dagger(z)\right)^N |0\rangle, \tag{2}$$

$$\Psi^\dagger(z) \equiv \psi^\dagger(z) U^q(z) e^{-|z|^2/4} \tag{3}$$

（ここで $|0\rangle$ は真空，$N$ は電子数，$\psi^\dagger$ は最低ランダウ準位に電子を生成する演算子，$U$ は準正孔演算子）という風に表されるし，さらに共形場を意識すれば，

$$\Psi_{\nu=1/q} \propto \left\langle \prod_i^N e^{i\sqrt{q}\phi(z_i)} \exp\left[-i\int d^2 z' \sqrt{q}\rho_0 \phi(z')\right]\right\rangle \tag{4}$$

(ここで $\phi$ は2次元の場で対数相関 $\langle\phi(z)\phi(z')\rangle \sim \log(z-z')$ をもつもの，$\rho_0 = 1/2\pi q$ は電子密度)．問題は，Laughlin状態は元のハミルトニアン（クーロン斥力相互作用する2次元電子系に強磁場をかけた系）の近似解であるが，逆に，この波動関数を厳密解としてもつハミルトニアンは何か？ この逆問題もHaldaneにより解かれていて，答えは，実空間で書けば複雑であるが，電子間相互作用を，互いの角運動量に分解して，高次のものをカットオフしたものとなる．直感的には，長距離クーロン力の短距離部分のみを残したものである．つまり，Laughlin波動関数（Chern–Simons理論の平均場解）は，短距離相関を取り入れた状態になっている．これは，分数量子ホール系において，一種の演算子積展開（operator product expansion）

$$
\begin{aligned}
&e^{i\sqrt{q}\phi(z)}e^{i\sqrt{q}\phi(z')} \\
&\sim (z-z')^q e^{2i\sqrt{q}(z+z')/2} + \text{高次}
\end{aligned}
$$

のように，相対角運動量 $q$ から始まることから，代数的に示すこともできる．ちょっと考えると，電子間に斥力があるだけで，超流動・超伝導におけるような凝縮が起きるなんて不思議極まりない！ しかし，文献10)でも強調したように，ここには巧妙な仕組みがあり，短距離斥力が複合粒子描像を良くし，これが，複合粒子の集合体としてのChern–Simonsゲージ場理論を良い有効模型にし，それがトポロジカル相をもたらした，という，$(2+1)$ 次元の特徴を最大限に活用したメカニズムを実現しているのである．

Anyonは，上で述べたように，空間2次元での粒子たちは置換群ではなく組み紐群で規定され，互いの周りを一周しても元に戻る必要はなく，半端な位相が残り得ることから発生する．つまり，$\theta \neq 0, \pi$ である．最近では，このようなanyonとその量子エンタングルメントを量子qubitに用いて，量子計算に用いる，というファンシーな提案もなされている[11]．

数学的には，組み紐群の表現として，この $\theta$ がスカラーではなく多次元表現（行列のようなもの）も可能なことが知られており，特にMoore–Readにより，分数量子ホール系でその存在の可能性が議論されている[12]．彼等はこれをnon-abelian統計と呼んでいる．特に，下から2番目のランダウ準位が半分だけ詰まった状態に対して，この統計をもつようなBCSペアリング状態（Pfaffian状態と呼ばれる；詳しくは，中島・青木：『分数量子ホール効果』[10]）と呼ばれるものが提案され，これも（天下りではなく）上記の演算子積展開から構成することもできる．

さて，分数量子ホール効果がこのように面白い性質をもっているのは，一にかかって，出発点が，Chern–Simonsゲージ場を採用すれば，トポロジカル項から成っていたことにある．このような場合の場の理論は，より一般に，Wittenにより1980年代に**位相的場の理論**（topological field theory）として発展させられている．これは，元々かなり数学的なものであるが，物性物理では実はそれが量子ホール系というもので，実現されているわけである．位相的場の理論の詳細は，本特集号では江口氏により，詳しく解説されている．

## 4. スピン自由度，軌道自由度，多準位と位相

電子はスピンという内部自由度をもっている．そのために，電子の運動方程式を，例えば準古典近似で考える際に，丁度上で光波について述べたときと同様な，Berry位相効果が生じる．このために，スピン・ホール効果のような，興味深い物理現象が実験・理論的に解析されている．本特集号では村上氏により詳しく解説されている．

Berryの位相は，多軌道系，つまり各原子に軌道が複数あるような系でも現れる．多軌道は，遷移金属やその化合物（関与するのは5重に縮退したd軌道）ではごく普通のことである．このような電子系に影響を与える何らかのパラメータを断熱的に変えたときに，電子の波動関数の位相まで注意すれば，変化は余計な位相を波動関数に与える．一般に複数軌道系では電子がある場所から別の場所に移動するときにはBerryの位相 $\theta$ が発生

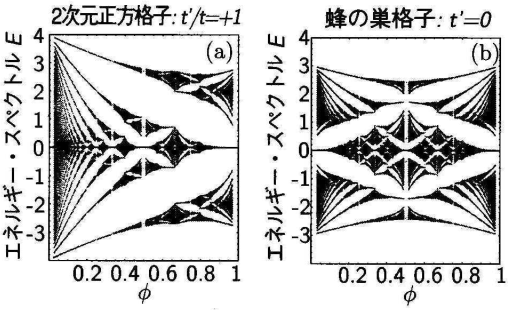


図6　(a) 2次元正方格子に垂直に強磁場をかけたときのエネルギー・スペクトル $E$ を磁場（単位胞を貫く磁束を磁束量子で測った $\phi$）の関数として示す．(b) 蜂の巣格子に対する同様な図[14]．

して，この位相を経路にわたって積分した

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_C \nabla\theta\cdot d\boldsymbol{r}$$

はトポロジカル量（Chern 数）であることは，Wilczek–Zee が指摘していた．堀田等は，複数軌道系のバンド構造においてトポロジカルな効果が存在することを示している[13]．

また，軌道は1種類であっても，多くの準位を考えたときに，Berry の位相について特別な考慮が必要になる場合がある．上で解説した量子ホール効果をもう一度見てみよう．2次元系に周期構造，例えば正方格子構造があるとしよう．すると，磁場の関数としてのエネルギー・スペクトルは，図6(a)に示すようなフラクタル（Hofstadter 蝶）になる．磁場が弱いとき（図の左端近傍）では，扇状の一連の線束が左下（および左上）から広がっているのが見えるが，これは普通のランダウ準位で，蝶をなすメインなギャップはこれらランダウ準位の間の隙間である．この各隙間がトポロジカル量子数（量子化されたホール伝導度）をもっている．一方，最近，蜂の巣格子上での量子ホール効果が大きな話題となっている．蜂の巣格子は，単位胞に原子が2個ある非 Bravais 格子であり，バンドは2枚ある．これが，蜂の巣対称性のために，Brillouzon の端で丁度円錐が頂点を付き合わせる形をとる．バンド分散構造としては，質量がゼロのディラック粒子と同じである．このため，様々な異常が発生するが，特に磁場中では特異な量子ホール効果が生じる．ここで詳述する紙幅はないが，最近，1枚の蜂の巣格子が，グラファイトを引き剥がすことにより実験的に用意することができ，特異な量子ホール効果も観測されて，物性物理におけるホットな話題をさらっている[14]．

この zero-mass Dirac cone が起きる場所は，電子・正孔対称性から，丁度 $E=0$ である．これに磁場をかけると，電子のランダウ量子化と正孔のランダウ量子化が $E=0$ で干渉し，特異なランダウ準位が $E=0$ に発生する．これがまた，特異なトポロジカル量子数を生む，というのが特異な量子ホール効果を一口で説明したものである．Hofstadter 蝶で言えば，蜂の巣に対してはこれが $E>0$ と $E<0$ で対称になり，$E=0$ にも蝶の一翼があることに対応する（図6(b)）．すると，この $E=0$ 近傍でトポロジカル量子数を計算したいが，これは厄介である．というのも，バンドのど真ん中にあるから，下から順々にこの量子数を計算し，$E=0$ 近傍まで足し上げねばならない．最近，初貝等は，これを，次のような方法で実行した[14]．まず，普通の量子ホール・トポロジカル量子数（Chern 数）を次のように拡張する．波動関数 $\varphi_j(\boldsymbol{k})$ を，最低エネルギー $\epsilon_1(\boldsymbol{k})$ をもつものから，$E=0$ 近傍を経て最高エネルギー $\epsilon_{2q}(\boldsymbol{k})$ をもつものにわたって考えよう（$2q$ は蝶の羽をなすバンドの数）．すると，これらについて Berry のゲージ・ポテンシャルは

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}))_{ij} = \boldsymbol{\varphi}_i^\dagger(\boldsymbol{k})\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\varphi}_j(\boldsymbol{k}), \quad (1\le i,j\le n) \tag{5}$$

（ここで $\boldsymbol{A}_{ij}(\boldsymbol{k})$ は反エルミートな $n\times n$ 行列，$n$ は，今考えているフェルミ・エネルギー $E_F$ 直下のバンド指数）．すると，Chern 指数は，このゲージ・ポテンシャルから，

$$\sigma_{xy}(E_F) = \frac{1}{2\pi i}\int \mathrm{Tr}\, dA \tag{6}$$

（ここで $A(\boldsymbol{k}) \equiv A_\mu(\boldsymbol{k})dk_\mu$ は微分形式で言うところの one-form）で与えられる．この定式化は，Berry の位相の，non-Abelian な拡張になってい

る[15]．必要以上に複雑化したような印象があるかもしれないが，こうやっておくと，$E_F$ の下に多数のバンドがあり，それらにわたるトポロジカル量子数の足し算を強いられる場合に楽になる．実際の計算には，格子ゲージ理論で開発されたトポロジカル量子数の精度良い計算法を，non-Abelian なポテンシャルに対するリンク変数に適用することができる．非可換 Berry 位相については，本特集では初貝氏により解説されている．

## 5. 非平衡過程における位相

普通に考える Berry の位相は，すべて**断熱過程**，つまりものごと（ハミルトニアンに含まれるパラメータ）を限りなくゆっくり変化させたときの話である．これを有限の速さで変えると，断熱定理はもはや成り立たず，準位間の量子遷移が起きる．このときに Berry の位相はどうなるだろうか，もはや定義もできないだろうか．実は，定義できることが知られている．まず，Aharonov–Anandan[16] が，ある条件（例えば，射影された Hilbert 空間での閉じた軌跡を考える場合）には，非断熱過程でも幾何学的位相を考えることができることを示した．その後，萱沼[17]が，具体的に 2 準位系についてこれを示し，Berry の位相に対応するものを具体的に計算した．2 準位系の場合，その間の Landau–Zener トンネリングは Weber 関数で表されるが，この位相は，微分方程式論で Stokes 位相として知られるものに一致する．

このような非平衡現象は興味深い．例えば，バンド・ギャップがあり，$E_F$ がギャップ内にあるときはバンド絶縁体であるが，これに十分強い電場をかけると，絶縁破壊が起きる．岡等によると，これは，量子準位間（今の場合価電子帯と伝導帯の間）の非断熱トンネリングとして捉えることができる（図 7）[18]．つまり，外場は今の場合強電場に対応するベクトル・ポテンシャルとすると，弱電場はバンドを断熱的にたどる場合，強電場は非断熱的にたどる場合で，このときには，Landau と Zener により昔議論されたように，準位間の遷移が起きる．このような強い電場下の非線形輸送を，「幾何学的位相」の観点から捉え直すこともできる．すると，強電場下での基底状態が崩壊する確率の式が，QED における真空の崩壊確率の Schwinger 公式と形式的に一致すること，また有効作用が，最近定式化された分極に対する Berry 位相公式を非断熱過程に拡張したもの（上記の Stokes 位相）になっていることが分かる．つまり，図 7 で，左端の確率分布と右端のを結びつける転送行列を

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{p}e^{i\beta} & \sqrt{1-p}e^{i\gamma} \\ -\sqrt{1-p}e^{-i\gamma} & \sqrt{p}e^{-i\beta} \end{pmatrix} \quad (7)$$

とすると，対角要素に現れる $\beta$ が力学的位相，非対角要素に現れる $\gamma$ が幾何学的（Stokes）位相である．このような解析は，モット絶縁体のような強相関系に拡張することもできる[18]．

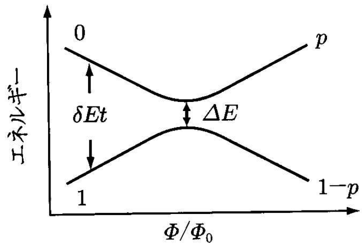



**図 7** Landau–Zener トンネリング．縦軸はエネルギー，横軸は，外部電場を時間依存（$\propto \Phi(t)$）ベクトル・ポテンシャルで表現したときの $\Phi$．初期（図の左）に下の準位 $|0\rangle$ に確率 1 でいた状態は，トンネリング後に確率 $p$ で上の準位 $|1\rangle$ に移る[18]．

## 6. おわりに

以上で，物理学における位相を概観した．「位相」には phase と topology という二義がある，ということから始めたが，局所的な phase が，場合によっては大局（topology）まで支配する，というのが面白い．位相は今後も物理学の fascination であり続けるであろう．

位相については，江口徹，倉辻比呂志，初貝安

弘，岡隆史，Yshai Avishai の各氏との議論に感謝したい．

## 参考文献[編注)]


1) N. Tsuji, S. Takajo and H. Aoki, *Phys. Rev. B*, in press.
2) 青木秀夫：数理科学 1991 年 11 月号，p.11（別冊・数理科学「場の理論」（サイエンス社，1999），p.107 に再録）.
3) Michael Berry は色々と面白い研究をしていて，ブリストル大学の homepage（http://www.phy.bris.ac.uk/）の彼のページを見ると解説されている．
4) F.D.M Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1788 (1987).
5) 青木秀夫：数理科学 2004 年 2 月号，p.22.
6) D.J. Thouless, M. Kohmoto, P. Nightingale and M. den Nijs, *Phys. Rev. Lett* **49**, 405 (1982).
7) B.I. Halperin, *Jpn. J. Appl. Phys. Suppl.* **26**, 1913 (1987); M. Kohmoto *et al*, *Phys. Rev. B* **45**, 13488 (1992).
8) M. Koshino *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1062 (2001); *Phys. Rev. B* **65**, 045310 (2002); **66**, 081301(R) (2002); **67**, 195336 (2003).
9) 青木秀夫，川上則雄，永長直人（編）：物理学論文選集「物性物理における場の理論的方法」（日本物理学会，1995）.
10) 中島龍也，青木秀夫：『分数量子ホール効果』（東京大学出版会，1999）.
11) S.D. Sarma *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 166802 (2005); C. Day, *Phys. Today* **58**, 21 (2005).
12) G. Moore and N. Read, *Nuc. Phys. B* **360**, 362 (1991).
13) T. Hotta *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2477 (2000); *Rep. Prog. Phys.* **69**, 2061 (2006).
14) Y. Hatsugai, T. Fukui and H. Aoki, *Phys. Rev. B* **74**, 205414 (2006) およびそこの文献.
15) Y. Hatsugai, *J. Phys. Soc. Jpn.* **73**, 2604 (2004); **74**, 1374 (2004).
16) Y. Aharonov and J. Anandan, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1593 (1987).
17) Y. Kayanuma, *Phys. Rev. A* **55**, R2495 (1997).
18) T. Oka *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 066406 (2003); **94**, 100602 (2005); **95**, 137601 (2005).


（あおき・ひでお，東京大学大学院理学系研究科）

編集部注）弊社ホームページに，著者の「名著に親しむ」が掲載されておりますので，合わせてご覧下さい．