グラフェンにおける光誘起ホール効果とカゴメ・フォト ニック結晶における光の局在

岡隆史・青木秀夫 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 (〒113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1) *E-mail: aoki@phys.s.u-tokyo.ac.jp

June 8, 2010

はじめに 1

固体物理に対する現代的なアプローチは約百年前 の量子論の誕生と、結晶中の電子に対する適用に 始まる。金属がなぜ光沢をもつのか、ダイアモン ドが何故透明なのか、といった疑問を、結晶中の 電子状態のバンド構造から答えることができるよ うになった。既存の物質だけでなく、最近の固体 物理の潮流には「面白い物質や面白い結晶構造に、 新しい物理がひそんでいる」という考え方がある。 これは、主に電子に対して考えられており、目覚 ましい現象が面白い物質や結晶構造を通じて新た な物理を生む、という図式になっている。筆者等 も、このような固体物理を専門として、超伝導や 強磁性や量子ホール効果などの電子物性や、非平 衡の物性を調べているが、最近、その考えを、光 が絡む現象に適用してみたところ、従来全く知ら れていなかった新たな物理現象を発見するに至っ た。本稿では、その流れから二つの話題、すなわ ち、グラフェンにおける光誘起ホール効果[1]とカ ゴメ・フォトニック結晶における光の局在[2]、と いうテーマについて解説をしたい。これらばいず れも光と面白いバンド構造が絡んだ現象である。

まず、第一の話題が光誘起ホール効果である。こ れは本来は磁場下の電子で起きるホール効果を光 の照射だけで引き起すというもので、キーワード は「ディラック電子」と「光による電子状態のトポ ロジーの制御」である。ディラック電子とは量子力 学と相対性理論を整合させるためにディラックが導 入したもので、電子のハミルトニアンは $H = \frac{P^2}{2m}$ の形ではなく後述の式 (2) のように行列を用いて 表せられる。固体物理では相対論的効果を考えて いない時でもディラック電子が顔を出すことがあ る。これは特別な結晶中で電子のバンドが近似的 にディラック型となっているからであり、このよう な物質の代表例がグラフェンである。グラフェン はこの世で最も薄い物質と言われている。最近の 固体物理における最もホットな物質の一つであり、 プレプリント・サーバーには年に何百というグラ フェン関連の論文が投稿されている(レビューと しては例えば [3])。この物質は炭素原子が蜂の巣

格子を組んだ2次元結晶であり、電気伝導に関与 するのは、原子当たり3個ある炭素のp軌道のう ち、化学で 軌道と呼ばれるものであり、この軌 道に対するエネルギー分散(バンド構造)は、ブリ ユアン帯の隅(K,K'点と呼ばれる)において、 個の円錐が頂点を突き合わせたようになっている。 これがちょうどディラック電子論における粒子の 分散と同じなのである。ディラック電子は単なる 半金属ではなく、ハミルトニアンの構造のために 深いトポロジカルな性質を持つ。グラフェンの物 理がかくも勃興したのは、そのためである。グラ フェンの物性については、実験・理論両面で、主に 電子の輸送の性質から膨大な研究があるが、本稿 での興味は、光物性である。上述の「特異性」が、 光物性に効くであろうか?効く、というのが我々 の理論的予測であり、具体的には、グラフェンに 円偏光を当てると、DC ホール電流が流れること が予言される。光と電流の絡んだ、純粋に量子力 学的効果である。この現象の背後にはベリー位相 に代表される幾何学位相が潜んでおり、非平衡系 で初めて生じる「純粋な量子効果」といえる。

二番目の話題は光の局在効果についてである。光 はこの世で最も早く、物質が光速 $c = 3 \times 10^8 m/s$ を越えて移動することは我々の物理法則に従えば 不可能である。ところが逆に光を遅くすることは 可能なのであろうか?答えは是である。実はこれ はとても簡単なことであって、物質中では光は真 空中より遅く進むのである。実際、物質中の光速 は $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ となる (ε 比誘電率、 μ 比透磁率)。では、 光の速度をどこまで遅くすることができるのであ ろうか?因子 $\sqrt{arepsilon\mu}$ を大きくすれば光速が遅くなる かもしれないが、同時に完全反射(金属表面)し てしまうので光は透過し得ないからダメである。 ところがある工夫をすれば光の速度を自在にコン トロールできるのである。我々は光の速度を限り なくゼロにして「光を静止させる」ことができる ことを理論的に示した。結晶中の電子がバンド構 造を撮るのと同様に誘電率のこととなる物質を用 いて人工的な格子を構成すると光のバンド構造、 すなわちフォトニック・バンドが形成される。特 に、バンド構造で重要なカテゴリーに強束縛模型

(tight-binding model) があり、例えば、前述のグ ラフェンのバンド構造も、蜂の巣格子上の強束縛 模型で扱うのが普通である。それでは、フォトニッ ク・バンドにおいても、電子における強束縛バン ドにアナロガスな系は実現できるだろうか。つま り、強束縛フォトニック・バンドは可能であろう か。ここでは、金属導波管ネットワークからなる フォトニック・バンドを考えると、強束縛フォト ニック・バンドが実現できることを提案する。面 白いことに、この強束縛バンドの構成要素となる 状態(電子でいえば、原子に局在したワニエ状態) に対応するものは、フォトニック・バンドにおい ては、金属導波管ネットワークの交差点に局在す る光のモードとなる。強束縛フォトニック・バン ドが可能になると、電子系で様々に議論されてい る面白い結晶構造に伴う特徴的な強束縛バンドと のアナロジーから、フォトニック・バンドにおい ても、多彩な格子を考えることにより面白いフォ トン分散を実現できるであろう。面白い例として、 電子系ではカゴメ格子上の強束縛バンドには分散 が無い(平らな)バンドが存在することが良く知 られている。これは、たとえ原子間の遷移確率が 有限であっても存在し、量子力学的干渉効果のた め生じる現象である。そこで、カゴメ格子状の金属 導波管ネットワークを考えると、「平坦フォトニッ ク・バンド」、つまり「静止したフォトン」が実現 できることを提案する。

2 光誘起ホール効果



Figure 1: (a) 磁場中のホール電流。ここでいう 「磁場」は静磁場 *B* 以外に(光誘起)Berry 曲率に よる有効磁場も含まれる。(b)-(d) 内因性ホール効 果の例:(b) 磁場下の量子ホール効果。(c) トポロ ジカル絶縁体における量子(スピン)ホール効果。 (d) 光誘起ホール効果。

それでは先ず、我々の提唱する、新しいホール効 果である「光誘起ホール効果」(photovoltaic Hall effect)[1] について、他のホール効果との類似点・ 相違点にも着目しながら解説しよう。ホール効果 とは、普通は試料に磁場をかけ、試料に付けた電 極間に電場をかけると、外部磁場にも電場にも垂 直に電流(ホール電流)が流れる現象である(図 1(a))。このホール電流を特徴付けるのがホール伝 導率 σ_{xy} であり、印可した電場 E と電流密度 j との関係

$$j_x = \sigma_{xy} E_y \tag{1}$$

の比例係数になっている。電流が電場に垂直に流れ るという不思議な現象は、19世紀にホールによっ て発見された静磁場中の電子が示す「古典ホール 効果」が端緒である。この現象はニュートン力学の 範囲内で理解でき、磁場中では電子が動くとロー レンツ力を受けるので回転運動を行い、さらに電 場があると、回転中心が磁場に垂直な方向にドリ フトするために生じるのがホール電流である。

ところが、その後、量子効果を考慮に入れない と説明できないホール効果が続々と発見された。そ のような例で最初に発見されたのは、同じく磁場 中のホール効果である「整数量子ホール効果」と 「分数量子ホール効果」である [4]。これらは、半 導体界面に存在する 2 次元電子系で発見されたも のであり、物性物理学における位相幾何学的(トポ ロジカル)効果の重要性を研究者に気づかせる役 割を果たした。トポロジーとホール効果が切って も切れない関係にあるのは、後で説明するように 量子力学的に計算されたホール伝導率 σ_{xy} が、数 学的には「トポロジカル不変量」と呼ばれる特別 な量になるためである。

さらに、磁場のかかっていない系でもホール伝 導率が有限になり得るということが認識されるよ うになった。つまり、近年話題になっているスピ ン・ホール効果(スピン軌道相互作用の存在下でス ピン流に対して生じる)や、その後考えられた量子 スピン・ホール効果である。後者は、元来グラフェ ンに対して提唱され、スピン軌道相互作用のため にエネルギー・ギャップが開いたトポロジカル絶縁 体と呼ばれる状態において生じ、スピン・ホール 伝導度はトポロジカル不変量となり、ナローギャッ プ半導体 (HgTe/CdTe) の量子井戸で観測されて いる。本稿の主題である「光誘起ホール効果」は、 これらに対して、いわば第三のホール効果といえ る。量子スピン・ホール効果が特別な電子構造を 持つバンド絶縁体において見られる線形応答現象 であるのに対して、光誘起ホール効果は一般の多 バンド系において、強い円偏光の照射により変更 を受けた電子状態が示す光応答であり、非線形応 答としてのホール効果である。

2.1 円偏光中のディラック電子

ここで提案する光誘起ホール効果は、グラフェン について考えられたので、先ずグラフェンの簡単 な解説をしよう。冒頭でも触れたように、炭素の 蜂の巣格子であるグラフェンは二次元ディラック 電子系とみなせる。バンド中でKとK'点にある ディラック・コーンに対しては、それぞれのコー ン近傍でディラック・ハミルトニアンによって表 すことができる。ac電場中のディラック電子系の ハミルトニアンは、2次元系に対しては2次元波 数($k_x,\,k_y$)空間で2 imes 2 のパウリ行列 $\sigma_{x,y,z}$ を 対応し、 ${
m ac}$ 電場の強度 $E_{
m ac}$ を無限小にすると当然 用いて

$$H(t) = \tau_z v[k^x + A_{\rm ac}^x(t)]\sigma_x + v[k^y + A_{\rm ac}^y(t)]\sigma_y + \frac{\Delta}{2}\sigma_z$$

のように書ける。ここで $\tau_z = \pm 1$ はカイラリティ と呼ばれる指数であり、グラフェンでは K 点は正 のカイラリティを、K' 点は負のカイラリティをも つ。vはフェルミ速度、 Δ はバンドギャップであり、 実際のグラフェンでは $\Delta = 0$ であるが、ホール効 果の説明の便のために、ここでは加えた。また、 A は外部電磁場を表わすベクトル・ポテンシャル である。円偏光の ac 電場であれば、 $(A_{ac}^x, A_{ac}^y) =$ $(A\cos\Omega t, A\sin\Omega t)$ となり、 Ω は光の周波数、A = eE_{ac}/Ω としたときに E_{ac} が電場強度を表す。

物質の電気伝導を量子論的に理解するには、普 通は線形応答理論、いわゆる久保理論を使う。そ こでは、弱い外部電場が誘起する電流を、電場の 1次摂動で計算し、伝導率は(ゼロ電場中、つま リ平衡系の基底状態での)電流相関関数で表され る。ところが我々が興味を持っているような強い レーザー光照射の下での電気伝導を考ようとする と、線形応答理論を超える必要がある。そこで、 我々は強い ac 電場中の光誘起電気伝導のための 拡張された久保公式を先ず導いた [1]。こんな拡張 が可能なのは、ac 電場中の時間依存シュレディン ガー方程式は、フロッケ (Floquet) の方法という ものを用いることによって、時間依存しない問題 に焼き直せるからである。つまり、空間的に周期 的なポテンシャル中のシュレディンガー方程式の 解がブロッホ状態で表されるように、時間的に周 期的なポテンシャル中のシュレディンガー方程式 はフロッケ状態という正規直交解となる。

ディラック電子の光誘起ベリー曲率 2.2とホール効果

強い ac 電場中に置いた試料において、電流を測る ために付けた電極に加えた弱い dc 電場に対する dc 電流応答、つまり光誘起電気伝導率は、

$$\sigma_{xy}(\boldsymbol{A}_{\rm ac}) = i \int \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} \sum_{\alpha,\beta\neq\alpha} \frac{[f_{\beta}(\boldsymbol{k}) - f_{\alpha}(\boldsymbol{k})]}{\varepsilon_{\beta}(\boldsymbol{k}) - \varepsilon_{\alpha}(\boldsymbol{k})} \times \frac{\langle \langle \Phi_{\alpha}(\boldsymbol{k}) | J_y | \Phi_{\beta}(\boldsymbol{k}) \rangle \rangle \langle \langle \Phi_{\beta}(\boldsymbol{k}) | J_x | \Phi_{\alpha}(\boldsymbol{k}) \rangle \rangle}{\varepsilon_{\beta}(\boldsymbol{k}) - \varepsilon_{\alpha}(\boldsymbol{k}) + i0} \quad (3)$$

となる (詳細は論文 [1] に譲る)。ここで α はフ ロッケ状態のラベルであり、 $f_{\alpha}(\mathbf{k})$ は非平衡定常 状態の分布関数、 $\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{k})$ はフロッケの擬エネルギー と呼ばれる量である。 $J = \partial H / \partial A$ は電流演算子、 $\langle\langle \Phi_{\alpha}|\boldsymbol{J}|\Phi_{\beta}\rangle\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_{0}^{T}\langle\Phi_{\alpha}(t)|\boldsymbol{J}(t)|\Phi_{\beta}(t)\rangle dt$ は二つ のフロッケ状態 α 、 β の内積(の時間平均)であ る。この表式は通常の久保公式とよく似ている。 実際、この光誘起電気伝導の拡張久保公式は通常 のエネルギー固有値の代わりにフロッケ状態を基 底として弱い電場について摂動展開をしたことに ながら通常の久保公式に戻る。さらに、ホール伝 導率については簡単な代数変形によって

$$\sigma_{xy}(\boldsymbol{A}_{\rm ac}) \tag{4}$$
$$= e^2 \int \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} \sum_{\alpha} f_{\alpha}(\boldsymbol{k}) \left[\nabla_{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\alpha}(\boldsymbol{k}) \right]_z$$

というコンパクトな表式になる ($abla_{m k} \equiv \partial/\partial m k$)。こ こで $\mathcal{A}_{\alpha}(\mathbf{k}) \equiv -i\langle\langle \Phi_{\alpha}(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} | \Phi_{\alpha}(\mathbf{k}) \rangle\rangle$ という微 分演算子の期待値は一種の「ゲージ場」であり、そ れから作られる「有効磁場」に相当する

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{k}} = \nabla_{\boldsymbol{k}} \times \mathcal{A}_{\alpha}(\boldsymbol{k}) \tag{5}$$

は「光誘起ベリー曲率」である。用語の解説をす ると、波動関数は、ヒルベルト空間でのベクトル であるが、波数空間で波動関数を移動すると、ベ リー (Berry) の位相と呼ばれる位相を獲得する場 合がある[5]。特に、ループ状の経路上で動かした ときに波動関数が元に戻らないとき、ベリー曲率 をもつという。2次元電子系においてはホール伝 導率は波数空間上の関数 Bk の積分の形にかける のだが、この関数がベリー位相と似た形をしてい るためにベリー曲率と呼ばれるようになった。ま た、このベリー曲率が有限の系では電子の運動は 曲げられてしまい、あたかも静磁場がかかってい るかのように振る舞う。

どのような物質でも大きなベリー曲率が発生す るわけではない。重要な条件は (a) ギャップと (b) トポロジーである。グラフェンで光誘起ホール効 果が大きいのは、強い円偏光でギャップが開き、蜂 の巣格子のトポロジーからホール係数が残る、と いう筋書きである。ここでいうギャップというの は、グラフェンのモデルにおいてはディラック点 におけるエネルギー・ギャップであり、有限温度で もホール効果を得るためにはギャップが十分大き く、フェルミ・エネルギーがその中にあるこをと 要する。一方、トポロジーが重要なのは、ホール 係数がベリー曲率の全ブリュアン帯に亘る積分に なっているためである。特定の波数でベリー曲率 が有限になっていても、積分すると消える場合は 往々にしてある。例えば、グラフェンの場合には K、K'という二個のディラック点があるが、時間 反転対称性を破らない摂動(たとえば、蜂の巣格 子を AB 部分格子に分け、A と B に異なるポテン シャル)を加えてギャップを開かせた場合、二つの 点の寄与はキャンセルしてしまいホール効果は生 じない。実際、この場合にベリー曲率を計算する と $\tau_z = \pm 1(K, K' 点)$ の寄与がキャンセルする。

では、強い円偏光の下での光誘起伝導率ではど うであろうか。まず、円偏光を当てた系は、時間 反転対称を破っている。実際、右円偏光は、時間 反転すれば左円偏光になることから、すぐ分かる。 円偏光中のディラック電子のフロッケ状態を具体 的に見てみよう。フロッケ状態の擬エネルギーは

$$\varepsilon_{\alpha} = \langle \langle \Phi_{\alpha} | H(t) | \Phi_{\alpha} \rangle \rangle + \Omega \gamma_{\alpha}^{AA} / 2\pi \tag{6}$$





Figure 2: (a) 二次元ディラック分散。円偏光中で は各 k-点はブリュアンゾーン中を円運動し、非断 熱幾何学位相を獲得する。(b) ギャップ Δ の開いた Dirac 分散。(c) 円偏光のディラック電子のフロッ ケ擬エネルギー。ディラック点にトポロジカル・ ギャップ $2\kappa > 0$ がダイナミカルに(つまり、静的 外場ではなく ac 外場(光)のために)開く。パラ メータとしては、レーザー光の強度は F = 0.2、 エネルギーは $\Omega = 1.0$ 、v を1とする単位系をとっ ている。

のように動的位相 (第一項) と、アハロノフ=アナ ンダン (Aharonov-Anandan) 位相 (第二項) の和と なる。アハロノフ=アナンダン位相というのは、普 通は断熱変化 (十分ゆっくりした変化) に対して 定義されるベリー位相を、非平衡に場合に拡張し たときに定義される位相である。特に、ディラック 点においては $\gamma_{\alpha}^{AA} = \pi\{[4(E_{ac}/\Omega^2)^2 + 1]^{-1/2} - 1\}$ で与えられる。この擬エネルギー分散は、図 2(c) で示すように、ディラック点 (k = 0) において $2\kappa = \sqrt{4(E_{ac}/\Omega)^2 + \Omega^2} - \Omega$ のギャップが開いて いる。これ以外のバンドの交差点においてもギャッ プが開いているが、ディラック点のギャップはア ハロノフ=アナンダン位相のためであり、円偏光 を照射した場合にのみ生じる。このとき、光誘起 ベリー曲率を計算するとディラック点の近くでは

$$\left[\nabla_k \times \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\alpha}(\boldsymbol{k})\right]_z \sim \frac{1}{2} \kappa \left(|\boldsymbol{k}|^2 + \kappa^2\right)^{-3/2}, \qquad (7)$$

となり、最初からギャップがあいている場合と異な り、カイラリティ τ_z によらない。そのため、グラ フェンについて計算をすると図3(b)のようにK、 K'点において同符号で足し算され、光誘起ホール 効果が生じることが分かる。

実際のサンプルに光誘起ホール電流が流れる様子を調べるために、有限のグラフェンに電極を接続し、円偏光を照射した時の電流分布を図4(a)に

Figure 3: (a) ディラック・バンドと (b) グラフェ ンの光誘起ベリー曲率。

示した。電極間だけではなく、それと垂直方向に も光誘起ホール電流が流れている様子が見てとれ る。光誘起ホール電流の向きは、右円偏光を左円 偏光に変えれば当然逆転する。*I*-V 特性を図 4(b) に与えるが、照射する円偏光の強度を強くすると ホール電流が大きくなる。ここで考えた、光誘起 ホール効果のために必要となるレーザー光の強度 は現実的であろうか。図4(b)から、有意なホール 電流を得るためには、例えば $F \sim 0.001 w(w$ はグ ラフェンのホッピング)程度が必要とすると、フォ トンのエネルギー $\Omega \sim 1 \text{ eV}, w = 2.7 \text{ eV},$ 格子 定数a = 2.6Aに対しては、レーザー光の電場は $E \sim 10^7$ V/m という、現実的な範囲内の値がえ られる。また、グラフェンだけでなく、もっと一 般に、多層グラフェンや、多バンド系 (例えば、d バンドと p バンドからなるような系) でも光誘起 ホール効果が生じることが最近の研究により明ら かになっており、今後の実験的な検証が大いに期 待されている。

3 金属導波管ネットワークにおけ る強束縛フォトニック・バンド

3.1 強束縛フォトニック・バンドとは

それでは、二番目の話題に移ろう。フォトニック結 晶[6] は光の操作法として興味深いことは言うまで もない。電子は結晶中でブラッグ反射を受け、そ のためにバンド構造が生じ、これは量子力学によ れば電子も波であるから当然であるが、逆に、似 たようなことが、周期構造中で光波に対して起き るはず、というのは大変自然な発想である。実際、 結晶中の電子とフォトニック結晶中の光の間のア



Figure 4: (a) 円偏光を照射したグラフェンにおける 光誘起ホール電流。左右の電極の間に V = 0.005wの電圧がかかっている ($w \simeq 3 \text{ eV}$ は跳び移り積分)。 円偏光の強度は F = 0.025w, $\Omega = 0.3w$ である。 (b) 縦電流 J_x とホール電流 J_y についての I - V特性。

ナロジーは、フォトニック・バンドの物理として確 立している。これにより、フォトニック・バンドに おけるバンド・ギャップ、小さな群速度をもった光 ("heavy photon")、欠陥に付随してギャップ中に 現れる局在モード、光のアンダーソン (Anderson) 局在などの現象が、精力的に調べられている。

フォトニック・バンドを実現するには、普通は 誘電体の周期的構造が考えられ、周期構造があれ ば、電子の波に対するブロッホの定理と同様に、光 に対してもブラッグ反射に起因するバンド構造が 生じる。これに対して、ここで問題にしたいのは、 次のようなことである。電子のバンド構造につい ては、固体物理の教科書にあるように、二つの極 限が分かりやすい。一つは、周期ポテンシャルが 弱い (nearly free の) 場合で、摂動によりバンド・ ギャップが開くことが示せる。逆の極限は、周期 ポテンシャルが強い場合で、このときには、各原 子に局在した軌道を用いて、局在軌道間の遷移を 記述する強束縛 (tight-binding) 模型が良い模型と なる。どちらの場合でもバンド構造は結晶構造を 反映するが、強束縛模型が特に面白いのは、結晶 構造への依存性が大きく、さらに、特徴あるバン ド構造(例えば、後述の平坦バンド)を得る指針 が明確なことである。そこで、「強束縛フォトニッ ク・バンド」を実現することは可能だろうか、と



Figure 5: 金属導波管ネットワークの概念図(グ レーの部分に光が閉じ込められ、白い部分は金属)。 3次元格子(a)、正方格子(b)、カゴメ格子(c)。



Figure 6: 図 5(b) の正方格子金属導波管ネットワークに対して計算されたフォトニック・バンドを、二つの異なる *a* の値に対して示す。実線は、tight-binding 模型によるフィット。挿図は下の方の数本のバンドを示す。

いうのが面白い問題となる。我々の提案 [2] は、金 属導波管ネットワークを使えば可能、というもの である。そこでは、図5に示したように、金属導 波管をネットワーク状につないだ構造を考え、そ こでの光のモードを議論する。導波管が金属でで きていれば、光は(少なくとも金属のプラズマ振 動数より小さな振動数をもつ光に対しては)壁の 内部に侵入せず、ネットワーク状の空隙を伝播す ることになる。単に、光がネットワーク状に閉じ 込められた、というだけなら、その周期構造は反 映するだろうが、強束縛にはならないのでは、と 一見思える。ところが、意外なことに、導波管の 「交差点」には光が局在し、その理由は、(波動方 程式として似ている)シュレディンガー方程式で いえば、量子零点エネルギーを得するために束縛 されるのである。この束縛状態が隣りあう交差点 の間の重なりによりバンドを形成し、強束縛フォ トニック・バンドとなる。

今までにも、強束縛フォトニック・バンドを考え る試みはいくつかなされている。例えば、二つの



Figure 7: 正方格子金属導波管ネットワークの最 低フォトニック・バンド (Γ点) に対して計算され た状態。破線は、導波管の境界線。



Figure 8: 図 5(c) のカゴメ格子金属導波管ネット ワークに対して計算されたフォトニック・バンド (*a* = 4)。挿図は下の方の数本のバンドを示す。

フォトニック結晶の間のエバネセント欠陥モード の結合、不純物やフォトニック結晶の欠陥が線状 に並んだ構造での局在波などである [7,8,9]。しか し、これらの構造では、光の局在状態は欠陥に局 在したものが用いられる。それに対して、ここで 提案するものは、導波管をネットワークにしただ けで、その交差点(管の連結部)に生じる局在状態 を使う。これが面白いのは、量子力学の零点エネ ルギーに類似の理由により生じるのが概念的に面 白い。構造としても簡単で自由に設計できる。実 際、計算されたフォトニック・バンドの分散は、強 束縛模型におけるものと驚くほど良い近似で一致 するので、この意味でフォトニック・バンドの「設 計」が現実的になったといえる。図 5(a) の 3 次元 的な導波管ネットワークは、いわゆる "woodpile" 型の inverted 金属フォトニック結晶 [10] を思い出 させるが、導波管ネットワークは、より一般的な 構造であり、図 5(b)(c) のように 2 次元的なもの も含む。さらに、woodpile では隙間 (air-band) の モードは隙間に振幅をもつが、金属導波管ネット ワークでは、低い方のモードは交差点に局在した 状態の間の強束縛バンドであるところが異なる。

それでは、実際に、典型的な図 5(b) の正方格子 構造に対して、フォトニック・バンドを計算してみ よう。ここでは、TM モード (E || z) の計算を示 す。簡単化として、金属は、絶対値が大きい負の 誘電率をもつものとする。要するに、導波管を作





Figure 9: カゴメ格子金属導波管ネットワークに 対して計算された状態を、最低(上)および下から 二番目(下)の平坦フォトニック・バンドに対して K点で示す。破線は、導波管の境界線。

る金属は、光に対して完全反射壁とする。これは、 通常の金属で少なくともマイクロ波に対しては良 い近似である。一方、より波長が短い可視光など では、金属中の光の損失は無視できなくなり得る ので、注意が必要であろう。フォトニック・バン ド構造は、この境界条件の元で、平面波展開(典 型的に 7000 個の波) により求めた。図6 に示した フォトニック・バンド構造において、下の方にあ るモードを見ると、バンド構造は、強束縛バンド 構造にフィットしたもの(曲線)と非常によく一致 している。正方格子の導波管は、格子の周期(こ こではaと名付ける)と管の太さ(ここでは1に とる)の比で特徴付けられるが、異なる a に対す る結果をみると、強束縛模型の"transfer energy" に対応する量は、aが大きくなるほど小さくなり (つまりフォトニック・バンドの幅が減少し) a を 増やすと指数関数的に減少する。当然ながら最隣 接の交差点間の transfer が最大であり、次隣接以 遠の transfer は、1 桁以上小さい。

それでは、光のモードをみてみよう。本当に、交

差点に局在しているだろうか。図7をみると、確かに交差点に局在しており、強束縛の名が適当であることを示唆する。振幅は交差点から離れるにつれて減衰し、これが上記のaに対する減衰を説明する。

3.2 量子力学とのアナロジー

それでは、何故このような局在モードが発生する のかをみてみよう。量子力学の方では、電子が、狭 い領域(例えば、量子細線と呼ばれる1次元の細 い領域)に閉じ込められた場合の状態は学生の演 習問題であるが、あまり知られていない現象とし て、2本の量子細線が十文字に交差した場合の状 態である。このとき、一見、1本の量子細線状態 の重ね合わせになるような気がするが、そうでは なく、実は交差点のところに局在状態が発生する [11]。古典力学的には、こんな局在が生じるはず もないので、これは純粋に量子力学的効果である。 実は、電子が交差点の近傍にいると、前後左右に 拡がることができるために制約が少なくなり、量 子力学的な零点エネルギーが低下し、この効果に より交差点に束縛される。電磁波に対するマック スウェル方程式と、物質波に対するシュレディン ガー方程式とは、似た形をしている(実際、2次 元系において TM モードに対しては同じである)。 よって、光波に対しても同様な束縛状態が存在し、 束縛エネルギーは、量子力学問題を光波問題に翻 訳すると、0.406(単位は2πc、導波管の幅を1と している)となる。上の導波管フォトニック結晶 で得られた強束縛バンドの中心は、まさにこの値 になっている。

このように、この強束縛バンドで使われている のは、束縛状態であり、何らかの共鳴状態(ロスを もつ)を使っている訳ではない。このような束縛 状態そのものは、光に対して、例えばT型ジャン クションで、ジャンクション位置に局在したモー ドの存在などとして知られていたが[12]、束縛状 態が格子の上でバンドをなすことは考えられてい なかった。構成法(零点アナログ)からして、こ のような強束縛フォトニック・バンドは、3次元 系や、TM 以外のモードに対しても存在すると考 えられる。一つコメントとして、結合されたプラ ズモン・モードを用いた強束縛バンドを実現する という提案がある[13]。しかし、これは金属表面 でのモードを使うために、表面の不規則性などに 敏感である。一方、ここで考えたバンドは、光の 振幅は金属に侵入しないために、不規則性には鈍 感であろう。

3.3 カゴメ格子における平坦フォトニッ ク・バンド

それでは、このような強束縛模型を使うと、フォ トニック・バンドの「設計」(望んだバンド分散を 得ること)ができる例として、カゴメ格子を考え ると、フォトニック・バンドを「平坦」(分散が平

ら)にできることを示そう。遅い光は、フォトニッ ク結晶の分野の大きなテーマの一つであり、低敷 居値のレーザーなどの関連で興味がもたれている [14, 15]。平坦バンドの発端は、やはり電子系であ る。電子に対する強束縛模型で、一連の模型を考 えると、平坦バンドが生じることが知られている [16]。これは、Mielke や田崎により考えられたこ とで、この平坦バンドは、transfer energy をゼロ にした極限とは全く異なり、transfer があっても、 トポロジカルな(波動関数の干渉の)効果により 平坦になることが肝要である。このために、ブロッ ホ状態は、普通は波数 k にあまり依らないのとは 対照的に、 k に 強く 依るのが 平坦バンドの 証とな る。カゴメ格子はその典型例(3本のバンドのう ち、下から3番目が平坦)である。電子に対して は、量子細線をカゴメ格子に組む試みがある[17]。 それでは、光波に対して金属導波管カゴメ・ネッ トワークを考えたら、どうなるだろうか。つまり、 トポロジカルな理由で平坦になるフォトニック・ バンドは作れるか?

図 8 に結果を示す。下端の 3 本のバンドが、局 在状態からできるカゴメ格子のバンドであり、下 から 3 番目のものが確かに平坦になっている。こ のバンドの幅は、(a = 4 に対して)、今の単位で 3×10^{-4} であり、つまり光速の 1/1000 以下の群速 度をもつバンドができた。光のモードを図 9 で見 ると、交差点に局在しているだけでなく、確かに、 波数 k に強く依存している。下から 6 本目のバン ドをみると、そこにも平坦なバンドがあり、これ は、一つ上の(節 (node) が余計に入った)束縛状 態から成る平坦バンドになっていることが分かる。

以上で分かるように、金属導波管ネットワーク により、様々なフォトニック・バンド(「重い光」 も含めて)の実現可能性が生じる。例えば、グラ フェンにおけるような蜂の巣格子を考えれば、光 のディラック・コーンも可能かもしれない。

4 おわりに

格子構造と光物性という観点から、グラフェンに おける光誘起ホール効果とう話題と、金属導波管 ネットワークにおける強束縛フォトニック・バン ドおよびカゴメ格子における光の局在という話題 を解説した。どちらもまだ理論的な提案であるが、 実験的に実現されることを願いながら筆をおきた い。グラフェンの仕事は、一部文科省科学研究費 「」の援助を受けた。フォトニック・バンドの仕事 は、遠藤晋平氏との共同研究であり[2]、また、物 質材料研究機構量子ドット・センターの迫田和彰 氏、東北大学理学研究科の畑野敬史氏に多くの貴 重な議論をいただいたことを感謝したい。

References

 T. Oka and H. Aoki, Phys. Rev. B 79, 081406R (2009), *ibid.* 79, 169901 (2009).

- [2] S. Endo, T. Oka and H. Aoki, Phys. Rev. B 81, 113104 (2010).
- [3] 青木秀夫: グラフェンの特異な物理(斉木幸一 朗、徳本洋志(編)「グラフェンの機能と応用 展望」(CMC 出版、2009)の第1章)。
- [4] 中島 龍也, 青木 秀夫:「分数量子ホール効果」(東京大学出版会、1999).
- [5] 青木秀夫、数理科学 29, No.11, pp.11 (1991) (別冊数理科学「場の理論」(サイエンス社、 1999)、p.107 に再録)。
- [6] 例えば、Kazuaki Sakoda: Optical properties of photonic crystals, 2nd edition (Berlin: Springer, 2005); John D. Joannopoulos et al.: Photonic crystals : molding the flow of light, 2nd edition (Princeton: Princeton Univ. Press, 2008) などを参照。
- [7] P. Amiri, M. Ranjbaran, K. Mehrany, B. Rashidian, and S. Fathololoumi, Fiber and Integrated Optics 25, 11 (2006).
- [8] N. Stefanou and A. Modinos, Phys. Rev. B 57, 12127 (1998).
- [9] M. Bayindir, B. Temelkuran, and E. Ozbay, Phys. Rev. Lett. 84, 2140 (2000).
- [10] J. Lee, C. Kim, Y. Kim, K. Ho, K. Constant, and C. Oh, Applied Physics Letters 88, 181112 (2006).
- [11] R. L. Schult, D. G. Ravenhall, and H. W. Wyld, Phys. Rev. B **39**, 5476 (1989).
- [12] A. Mekis, J. C. Chen, I. Kurland, S. Fan, P. R. Villeneuve, and J. D. Joannopoulos, Phys. Rev. Lett. 77, 3787 (1996).
- [13] T. Ito and K. Sakoda, Phys. Rev. B 64, 045117 (2001).
- [14] H. Gersen, T. J. Karle, R. J. P. Engelen, W. Bogaerts, J. P. Korterik, N. F. van Hulst, T. F. Krauss, and L. Kuipers, Phys. Rev. Lett. 94, 073903 (2005).
- [15] Y. Vlasov, M. O'Boyle, H. Hamann, and S. McNab, Nature 438, 65 (2005).
- [16] 草部浩一、青木秀夫:「強磁性」(東京大学出 版会、1998)。
- [17] K. Shiraishi et al, Appl. Phys. Lett. 78, 3702 (2001).