「固体物理」2010 年 11 月号出版予定。

ディラック電子の理論

東京大学大学院理学系研究科　青木秀夫

1　はじめに

本稿を執筆中 (2010 年 10 月）に丁度、2010 年度のノーベル物理学賞がグラフェンの業績に対して、Andre Geim と Konstantin Novoselov に与えられた、というニュースが飛び込んできた。グラフェンの物理 [1, 2, 3, 4] は、Geim の表現では、「鉛筆の中のニュートリノ」であり、その意味は勿論、鉛筆の成分であるグラファイトから炭素一層を取り出すとグラフェンであり、そのバンド分散が、質量がゼロであるディラック粒子の分散と同じ、ということである。本稿では、このディラック粒子の性質に焦点を当てて解説し、幾つかの物性（ここでは、光学ホール伝導度、光誘起ホール効果など）を探索するのが目的である。グラフェンそのもの、および、その蜂の巣格子に由来するディラック電子の性質に関しては、既に本誌において、初貝安弘氏と共著の解説 [5] を執筆したので、それを参照していただければ幸いである。

2　ディラック粒子

先ず、炭素の蜂の巣格子であるグラフェンが、何故ディラック・コーンの分散をもつかを、簡単に復習してみよう。グラフェンにおける炭素の π 軌道に対する、Bloch 表示におけるハミルトニアンは、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(\boldsymbol{k}) &= \sum_{\boldsymbol{k}} \mathbf{c}^{\dagger}(\boldsymbol{k}) H(\boldsymbol{k}) \mathbf{c}(\boldsymbol{k}), \\
H(\boldsymbol{k}) &= \begin{pmatrix} 0 & D(\boldsymbol{k}) \\ D^{*}(\boldsymbol{k}) & 0 \end{pmatrix} \\
&= R_1\sigma_1 + R_2\sigma_2
\end{aligned}
$$

となる。ここで $\mathbf{c}^{\dagger}(\boldsymbol{k})$ は $(c_A^{\dagger}(\boldsymbol{k}), c_B^{\dagger}(\boldsymbol{k}))$ という 2 成分の演算子、$D(\boldsymbol{k}) = t(1+e^{-ik_1}+e^{-ik_2})$、$t \simeq 2.7$ eV はグラフェンを tight-binding 模型で表したときの hopping energy である。また、$R_1(\boldsymbol{k}) = \mathrm{Re}\, D(\boldsymbol{k})$, $R_2(\boldsymbol{k}) = -\mathrm{Im}\, D(\boldsymbol{k})$ 、$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$ はパウリ行列である。このハミルトニアンを対角化すれば、永年方程式 $\epsilon^2(\boldsymbol{k}) = |D(\boldsymbol{k})|^2$ から、エネルギー分散は $\epsilon(\boldsymbol{k}) = \pm|D(\boldsymbol{k})|$ となる（図 1）。K 点、K’ 点と呼ばれる、ブリユアン

帯の角 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_0$ においては $D(\boldsymbol{k})=0$ となるので、その近傍でで $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p}$ 摂動のように $\delta\boldsymbol{k}\equiv\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0$ に関して展開すれば、$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k})\equiv(R_1(\boldsymbol{k}),R_2(\boldsymbol{k}))$ として、

$$H(\boldsymbol{k}) \;\approx\; (\partial\boldsymbol{R}/\partial k_x\cdot\boldsymbol{\sigma})\delta k_x+(\partial\boldsymbol{R}/\partial k_y\cdot\boldsymbol{\sigma})\delta k_y$$

のように $\boldsymbol{k}$ に線形となり、つまりディラック・コーンとなる（図 1）。K 点、K' 点における、バンド分散の $\boldsymbol{k}$ 微分はすなわちフェルミ速度 v_F であるから、結局

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{k}) &= v_F(\pm k_x\sigma_x+k_y\sigma_y) && (1)\\ &= \begin{pmatrix} 0 & k_x\mp ik_y \\ k_x\pm ik_y & 0 \end{pmatrix} && (2)\end{aligned}$$

となる。ここで複号は、考えている k 点のカイラリティーに依る（K 点なら上の記号を、K' 点なら下の記号を採る）。格子模型（蜂の巣格子など）では、ディラック・コーンが二個現れ (doubling)、カイラル対称性という面白い問題が生じるが、これも文献 [5] に譲る。

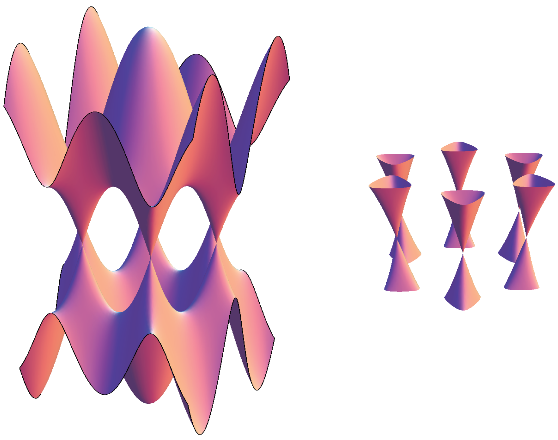

図 1: 蜂の巣格子上の tight-binding 模型のバンド分散の全体像（左）と、K, K' 点近傍のバンド分散（右）。

結局、分散は、形式的に質量ゼロのディラック粒子となり、質量ゼロのディラック粒子のことを、場の理論 [6] では Weyl 粒子と呼ぶことがあるので、「鉛筆の中にある」のは正確には Weyl ニュートリノとなる。

どのような場合にディラック・コーンの分散が現れるか、という条件については、解説 [5] に詳しく述べた。そこの結論は、ディラック・コーンは結構一般的な条件下で現れるので、蜂の巣格子の専売特許ではない。この意味で固体物理でディラック電子を考えることは、決して特殊なことではない。そもそも、ハミルトニアンが 2 行 2 列になったのは、グラフェンが 2 バンド系であるためで、実際、蜂

の巣格子は非 Bravais（単位胞に２原子を含む）格子である。2 次元で配位数３をもつのがグラフェンであるが、3 次元で配位数４のダイヤモンド構造（これも単位胞に２原子を含む）も、もし各原子に 1 軌道しかない場合には（W 点に）ディラック・コーンがあることが示せる（現実には各原子は sp^3 軌道をもつ）。Creutz は、4 次元で配位数が 5 の模型でもディラック・コーンが構成できることを示している [7] ので、結構一般的であることがここからもうかがえる。

また、最近、有機物質 (圧力下の α-(BEDT-TTF)$_2$I$_3$) においてもディラック・コーン分散が発見され、大きな分野に発展している [8]。この系に磁場をかけたときにディラック・コーンに由来するランダウ準位も観測されている [9]。

実は、良く知られた例は、全く違う分野である、強相関電子系でこの何十年議論されてきたモデルの一つにも有る。それは、π 磁束状態 (π-flux state) と呼ばれるもので、簡単な例は、正方格子で、単位となる正方形のそれぞれに、自発的に（磁束量子の丁度半分の）磁束が入ったようなモデルである。この状態がなぜ発生するかは本来は多体効果に関して議論されるが、このモデルから出発してバンド分散をみると、ディラック・コーンを持っている。しかも、初貝等が示したように、蜂の巣格子と π-flux state は、連続的につながる [10]。

3　ディラック粒子のランダウ準位と量子ホール効果

磁場中では、上記のハミルトニアンにおいて、$\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{\pi} = -i\nabla - e\boldsymbol{A}$ と置き換えればよい。ここで、$\hbar = 1$ の単位系をとっており、磁場は $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ である。これにより、図 2 のようなディラック・ランダウ準位となる。

量子ホール効果は、蜂の巣格子に対しては、

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{h}(2n+1)$$

となり ($n = 0, \pm 1, \ldots$)、これが実験的に観測されているグラフェン量子ホール効果である [1, 11, 2, 12]。蜂の巣格子においては、ディラック・コーンが２個存在する (doubling) から、各ディラック・コーンからの寄与として、単純に２で割ると

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{h}(n+1/2)$$

となり、1/2 という半奇数が出現する。ディラック・コーンが二個現れるのは、Nielsen-二宮の定理 [13] のためと見なすことができ、この定理は、「格子模型においては、カイラル対称性があればディラック・コーンは必ずペアで現れる」ということを主張する。量子ホール効果に現れる量子数 (ホール伝導度 $\sigma_{xy} = -Ce^2/h$ における C）は、チャーン (Chern) 数というトポロジカル不変量であり、普通は整数である。従って、ここに半奇数が現れるのは異常なことである。但し、全ホール伝導度は、蜂の巣格子に対しては整数となり、半奇数はいわば “隠されて ”いる。

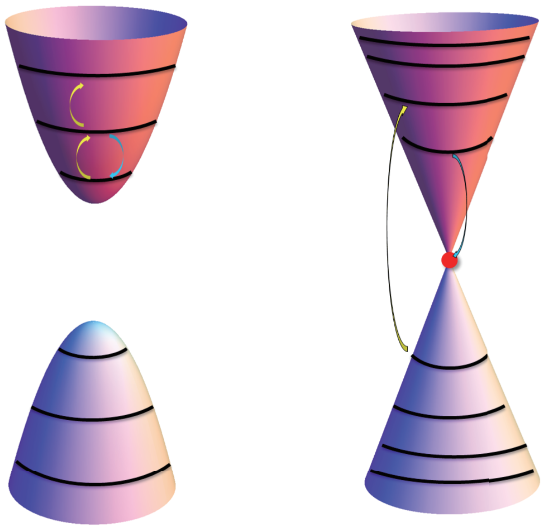

図 2: 普通の半導体（左）と、グラフェン（右）のランダウ準位における光学吸収・放出過程の例。

ディラック・コーンの数（半導体物理学の用語でいえば、valley 縮退度）で割り算すれば半奇数となるが、単純にそうして良いのか、という点は自明ではない。

一方、ディラック粒子を場の理論で（つまり、無限に大きい連続空間で）扱うと、ディラック・コーンあたり 1/2 のチャーン数をもっていることが知られている。これを、場の理論では、**異常** (anomaly) と呼んでいる。場の理論では、ディラック粒子は、外部磁場がない場合でも既に半奇数のチャーン数 $\sigma_{xy} = (1/2)\mathrm{sgn}(m)$ をもっている。ここで、ディラック粒子は、一般的に質量 m をもつとしており、フェルミ・エネルギー E_F は、開いたギャップ中にあるとしている [14]。これは、Berry の接続 [15] を計算することにより、直接示すことができる。質量 m をもつディラック粒子に対しては、ハミルトニアンは

$$H = k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + m\sigma_3 = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{R} = (R_1, R_2, R_3) = (k_x, k_y, m) \tag{4}$$

で与えられる。ここでは、R_3 を、$\boldsymbol{R}$ 空間での z 軸として導入したので、(k_1, k_2) 平面は $\Pi_m = \{\boldsymbol{R}|R_3 = m\}$ に対応する。すると、固有エネルギー $-R = -\sqrt{|\delta\boldsymbol{k}|^2 + m^2}$ をもつ波動関数 ψ と、その Berry 接続 $\mathcal{A} = \psi^\dagger d\psi$ に対して、全 Berry 曲率の (k_x, k_y) 平面に亘る積分 (Chern 数) は、$C = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Pi_m} d\mathcal{A} = \int_{\Pi_m} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \mathrm{sgn}\,(m)/2$ となる。ここで $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\mathcal{A} = \boldsymbol{R}/(4\pi R^3)$ はゲージ場 $\mathcal{A}$ の作る仮想的な (Berry 曲率を議論するときに現れる)「磁場」であるが、その形は丁度原点にある磁気単極子がつくる磁場と同じ形をしている ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = \delta^3(\boldsymbol{R})$ から確かめることができる)。この導出では、量子数 1/2 が出てくるのは、磁気単極子がつくる全磁束のうち、平面 Π_m を通過する

ものだけがカウントされるためである、と理解できる。以上の導出は文献 [16] による。

ところが、場の理論から格子模型に行くとたんに、事情は全く異なる。格子模型においては、状態は Bloch 状態となり、それが住んでいるのはブリユアン帯である。ブリユアン帯はもちろん、逆格子空間において基本並進ベクトルだけ進めば元に戻る、という周期性をもっている。これに伴い、チャーン数を計算する際の Berry 曲率の積分は、全 k 空間ではなく、第一ブリユアン帯で行うことになり、Thouless 等による所謂 TKNN 公式 [17] が示したように、**格子ではチャーン数は必ず整数**となる。蜂の巣格子で整数となったのは、この例である。

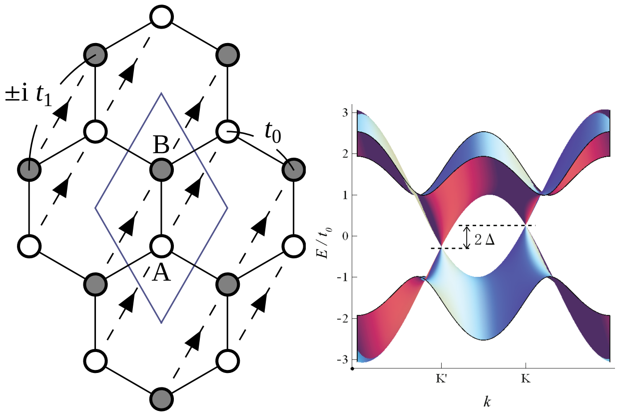

図 3: ずれた 2 個のディラック点をもつ格子模型 [16]。(a) 実線は最隣接ホッピング t_0、破線は第二隣接ホッピング（矢印の方向に it_1、反対方向には $-it_1$）、白丸（黒丸）は A(B) 副格子点。(b) バンド分散、$2\Delta = 2\sqrt{3}t_1$ は二個のディラック・コーンのずれ。

そこで、「格子模型において、半奇数のトポロジカル量子数に分解できないか」という問題を提出することができる。ここでは、渡辺等による議論 [16] を、簡単に紹介しよう。Nielsen-二宮定理には前提条件があるので、これを超えるような広い範囲の格子模型を考えれば、奇数個のディラック・コーンをもつ模型を考えることはできる。しかし、この場合でもチャーン数は整数である。また、Haldane は、全外部磁場はゼロであるが、格子のプラケットの一部分を見れば有限の磁束が通っているような蜂の巣格子上の模型を考え、この場合も質量ギャップがあれば量子ホール効果が起きるが、量子数は整数であることを示した [18]。それでは、ディラック・コーンは複数あるが、そのエネルギー軸上での位置を互いに上下させることができるとしたら、チャーン数はどう振る舞うであろうか。この振る舞いから、各ディラック・コーンに付随するランダウ準位のもつチャーン数が、フェルミ・エネルギー E_F を走査したときに $\cdots, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, \cdots$ という半奇数の系列をもつこととコンシステントになるだろうか。この問題に答えるために、渡辺等は、二個のディラック・コーンが相対的に自由に上下させられる模型を考え、実際に数

値的にチャーン数を計算した。図3がその模型であり、これを作る方針としては、パウリ行列で表された２行２列のハミルトニアンに、$\boldsymbol{k}$ 依存の係数をもつ σ_0(単位行列) を加えればよい（このために、カイラル対称性、つまり $\{H, \sigma_z\} = 0$ という性質は破れる)。この $\boldsymbol{k}$ 依存係数の値が K 点と K' 点で異なれば、二個のディラック点は異なるエネルギーをもつ。k 空間から実空間に移ると、この模型は、各ディラック・コーンをコーンのままに保つために A-A（または B-B）副格子間をつなぐ第二隣接ホッピング ($\propto t_1$) をもつ模型となっており、また K, K'（互いに時間反転の関係）の縮退が解けるためには複素のホッピングとなる。コーンのずれは t_1 に比例する。

チャーン数の数値計算は、ディラック粒子に対しては、E_F がディラック点近傍にあるために、「ディラックの海」からの寄与を全て足さなければならないので、非可換 Berry 位相や格子ゲージの方法を使うという注意が必要であることは、[5] で強調した。この注意をした上での計算結果を図 4 に示す。比較のために、普通の蜂の巣格子に対する結果も並べてある。蜂の巣格子ではチャーン数は $\cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots$ のように２跳びになるのに対して、二個のディラック・コーンをずらせた場合は、チャーン数の数値計算結果は、$\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ のように１跳びになり、これは、個々のディラック・コーンが $\cdots, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, \cdots$ という半奇数の系列をもつと仮定して、足し算した結果と良く一致する。この一致は決して自明ではない。上で強調したように、場の理論と格子模型とは異なる世界であるから、単純な足し算が良いか悪いかは調べねば分からないことである。１跳びの量子ホール・ステップが現れる位置も、この格子模型で計算したランダウ準位の位置と一致する。また、t_1 を変化させて、二個のディラック・コーンのずれを変えた場合も、チャーン数は半奇数の足し算というシナリオとコンシステントになる（図 5)。また、量子ホール状態はトポロジカルな状態であり、バルクの状態と端状態には密接な関連がある。この現れの一つとして、端状態の数をカウントするとバルクのチャーン数と一致する、という、初貝により “bulk-edge correspondence” と名付けられた定理がある。今の模型でもその性質は保たれており、有限系のエネルギー・スペクトルを見ると、端状態の数が $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ のように１跳びとなっている。結局、あらゆる格子模型は TKNN 公式を逃れられないという制限の元では最大限に、この模型により、半奇数の系列に分解できるかどうかが確かめられたことになる。また、同様な議論は、ディラック点まわりに、異なるフェルミ速度をもつディラック・コーンが複数存在するような模型（図 6）に対しても行うことができる [19]。

ここで考えられた複素ホッピングの模型は、あまりに人工的なものと感じられるかもしれない。しかし、最近、レーザー冷却された原子系を光格子上に置いた系において、系のパラメータを微調整すると、nonabelian なゲージ構造をもつ系が用意できる、ということが提案されており [20]、決して机上の空論ではないかもしれない。より広くは、３次元の所謂トポロジカル絶縁体 [21] の表面にはディラック・コーン的分散をもつ状態が発生し、これは左右の表面で分離されているので、

面白い問題となる。

以上では、系はクリーンなものを考えた。実際には、グラフェンの試料には、荷電不純物のような外的な不規則性や、ripple と呼ばれる内的な不規則性がある。このときにランダウ量子化された状態や量子ホール効果がどうなるかは、大きな興味となる。グラフェンをディラック粒子と考えれば、これは不規則性をもつディラック・ランダウ状態のアンダーソン局在の問題となる。野村等 [22] はこの問題を考え、$n = 0$ のランダウ準位の特殊性として、不規則性の効果を表すのによく用いられる $\sigma_{xx} - \sigma_{xy}$ ダイアグラムにおいて、$n = 0$ は特別となるので、この準位に対する量子ホール効果が頑強となることを示した。一方、グラフェンを、元の蜂の巣格子模型を用いて考察すると、そこにはカイラル対称性があり、不規則性としてこの対称性を尊重するもの（典型的に、ホッピング・エネルギーに対する不規則性、近似的に ripple の不規則性）を考えると、$n = 0$ での量子ホール効果は異常にシャープになることを河原林等が示している [23]。

普通の２次元電子系における整数量子ホール効果は、今や抵抗の標準に用いられているのは良く知られている。グラフェンにおける整数量子ホール効果も、最近では精度が飛躍的に向上しており、量子ホール効果の量子化の精度が、初期には ppm (part per million) 程度であったのが、現在では ppb (part per billion) に達している [24]。

整数量子ホール効果の次に当然興味あるのは、グラフェンで**分数量子ホール効果**が起きるかどうかである。GaAs/AlGaAs のような半導体界面では、系が十分きれいであれば強磁場中で普遍的に見られる現象であるから、原子スケールで２次元系であるグラフェンでも期待するのは自然であろう。分数量子ホール効果は強相関電子効果の一つなので、一見、炭素という軽元素は弱相関電子系なので強相関効果は如何か、と思えるかもしれない。しかし、分数量子ホール効果で問題になる電子相関は、ゼロ磁場中の電子ではなく、強磁場中でランダウ量子化された（つまり空間的に、磁気長と呼ばれるサイズに局在した）波動関数に対する相関効果である。従って、半導体界面の２次元電子系が強磁場中で強相関になったようなことが、グラフェンで起きても不思議ではない。ちなみに、$\ell = \sqrt{\hbar/eB}$ で表される磁気長は、２次元電子系でもディラック電子でも同じ表式であり、$B = 10$T 程度の磁場に対して、約 80Å というサイズをもつ。

実際、2009 年に、Kim（コロンビア大学）のグループが待望の分数量子ホール効果を観測した [25]。最初に観測されたのは、ランダウ準位占有率が $\nu = 1/3$ の分数量子ホール効果である。電子相関効果であるから、試料はなるべく不規則性が少ない方が良い。鍵となったのは、グラフェンを基板の上に置くのではなく、空中に浮かせた (suspended graphene、あるいは free-standing graphene と呼ばれる）試料を用いたことである。より最近では、1/3 以外の様々な分数が観測されている。

文献 [26] でも解説したように、普通の２次元電子系では、強磁場中での多体効果は、ランダウ波動関数の間で起き、このために、多体ハミルトニアンに入ってくる電子間相互作用は、クーロン相互作用をランダウ波動関数で挟んだ行列要素

となる。これを Haldane の擬ポテンシャルと呼ぶ。これにより、条件によっては基底状態が Laughlin の量子液体と呼ばれるものになり、これは (Chern-Simons) ゲージ場が自発的に破れた状態である。グラフェンにおいては、磁場中ではディラック電子に対するランダウ量子化された状態になるから、クーロン相互作用はディラック・ランダウ波動関数で挟んだ行列要素で表される [27]。柴田等は、DMRG（密度行列繰りこみ群法）を用いてこの系を調べている [28]。通常の２次元電子系における分数量子ホール効果においては、ランダウ準位占有率 $\nu = 5/2$ というところにおいて、BCS のペアリング状態に類似の状態になっているのではないか、と言われており、そこでの準粒子励起は、nonableian 統計という特別な性質をもつと考えられている [29]。グラフェンにおける分数量子ホール状態にも、このようなエキゾチックなものが見えれば面白いであろう。特に、ディラック点付近では電子と正孔の２バンド系であるから、nonableian に成り易いことが想像される。

また、多体系としてのディラック粒子系においては、E_F がディラック点近傍にあるときに、「ディラックの海」が詰まっている訳なので、クーロン相互作用する多体系を特徴付ける r_s パラメータをどう定義するか（海をどう考慮するか）、という基本的な問題が存在する。真空偏極 (vacuum polarisation) の問題も興味深いことが静谷により指摘されている [30]。多体効果を観測するためには、例えばサイクロトロン共鳴を用いることができる。普通の２次元電子系においては、磁場中の荷電粒子のサイクロトロン共鳴周波数（つまり、ランダウ準位のエネルギー間隔）は、粒子間相互作用を考慮しない（自由電子の）場合と、相互作用系とで同じである、というコーン (Kohn) の定理 [31] があるので、多体効果のプローブには使えない。ところが、ディラック粒子は線形分散をもつため、サイクロトロン共鳴において、コーンの定理が適用されない。つまり、ハミルトニアンが運動量演算子の二次で与えられる場合には、ハミルトニアン H とランダウ準位の昇降演算子 $\pi^{\pm}$ との交換子が、相互作用項が有っても無くても $[H, \pi^{\pm}] = \pm\pi^{\pm}$ を満たすためにコーンの定理が成立する。ハミルトニアンが運動量演算子の二次で無い場合（普通の半導体では、バンドが放物線からずれる効果）では、この定理は適用されず、線形分散をもつ場合も当然そうなる。

4　光応答と光学ホール伝導度

ディラック粒子の系に、一様な外部磁場 B をかけると、ランダウ量子化が起き、ランダウ準位は

$$\epsilon_n = \mathrm{sgn}(n)\sqrt{n}\hbar\omega_c, \tag{5}$$

$$\omega_c = \frac{\sqrt{2}}{\ell}v_F = v_F\sqrt{\frac{2eB}{\hbar}}, \tag{6}$$

となる。ここで $n = 0, \pm1, ...$ はランダウ指数、$\ell = \sqrt{\hbar/eB}$ は磁気長（これは通常の２次元電子系と同じ）。通常のランダウ準位との大きな違いは三点あり、(a) 通常は

n に比例するランダウ準位が、$\sqrt{n}$ に比例する、(b) 通常は B に比例するランダウ準位が、$\sqrt{B}$ に比例する、(c) $n = 0$ という特別な、丁度ディラック点に一致するランダウ準位が存在する。これに伴い、サイクロトロン吸収スペクトルも、通常は単一のランダウ準位間隔を反映するのに対して、特徴あるものとなる。ディッラク・ランダウ準位間の選択則は $|n| - |n'| = \pm 1$ であり、これも通常の選択則 $n - n' = \pm 1$ とは異なる。これらを利用して、1980 年代に提案されたランダウ準位レーザー [32] をグラフェンで考える、という提案もある [33]。これを、先ずは緩和の様子を実験で調べる試みも始まっている [34]。

量子ホール系では静的ホール伝導度が量子化されるが、光学ホール伝導度（ac Hall conductivity、典型的に THz 域）がどうなるかは興味深い。いわば、「光で見る量子ホール効果」である。森本等は、通常の量子ホール系およびグラフェンに対して光学ホール伝導度を計算し、量子ホール・プラトーが意外にも ac 領域でも残ることを見出した [35]。量子ホール (QHE) 系のエネルギー・スケール（つまり、サイクロトロン・エネルギー）は数 T の磁場下では THz 領域となるが、近年 THz 分光の実験的技術の進展により、量子ホール系への光学測定アプローチが可能となってきた。これまではスペクトルの分光などが行われてきた。直流の量子ホール効果では、伝導度がトポロジカルな理由により量子化されたが、ホール伝導度が ac 領域でどうふるまうかは興味がもたれる。AC にいったとたんに、量子ホール効果は洗い流されてしまうのだろうか。森本等は、量子ホール系で光学ホール伝導度 $\sigma_{xy}(\omega)$ を久保公式

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}(\omega) &= \frac{i\hbar e^2}{L^2}\sum_{\epsilon_a<\varepsilon_F}\sum_{\epsilon_b\geq\varepsilon_F}\frac{1}{\epsilon_b-\epsilon_a} \\ &\times\left(\frac{j_x^{ab}j_y^{ba}}{\epsilon_b-\epsilon_a-\hbar\omega}-\frac{j_y^{ab}j_x^{ba}}{\epsilon_b-\epsilon_a+\hbar\omega}\right),\end{aligned} \tag{7}$$

から求めた。ここで ϵ_a は固有エネルギー、j_x^{ab} は電流の行列要素、ε_F はフェルミ・エネルギーである。その際、厳密対角化法により、不規則性によるアンダーソン局在の効果をとりこんだ。先ず、通常の 2 次元電子系に対して、クリーンな系であれば量子ホール・プラトーが ac 領域でも存在することはすぐ分かるが、ある程度の disorder でもホール・プラトーが残ることが見出された。さらにグラフェン量子ホール系に対しても $\sigma_{xy}(\omega)$ を計算し、ディラック粒子を反映した構造のものになることがわかった (図 7)。AC では、プラトーの値自身は量子化値からずれるが、プラトー構造は残る訳である。物理的には、これは状態のアンダーソン局在の効果が AC でも現れることに起因する。

このような「光で見る量子ホール効果」は、実験では観測できるのであろうか。静的な伝導なら、単に電極を付ければよいが、光ではそうは行かない。森本等は、ファラデー回転を使えば、光学量子ホール効果が観測されることを提案した。子供の頃に、方解石を通して文字を見ると、文字が二重に見えることにびっくりし

たであろう。光の偏光の方向により屈折率が異なるための現象である。電子系に磁場をかけると同様なことが起き、この場合は偏光を当てると、透過光の偏光の向きが回転する（ファラデー回転）。ホール効果では、z 方向に磁場、x 方向に電場をかけた時、y 方向にホール電流が誘起されるわけだが、ファラデー回転の場合は z 方向に磁場がかかった状態で x 方向に偏光した光を入射すると y 方向に偏光した光が誘起されるため、入射光の偏光面が回転する。この回転角が光学ホール伝導度に比例するために、ファラデー回転を使って光学ホール伝導度を観測できる。このように、量子ホール効果が光学的領域測定へと拡張される。実験的には、ファラデー回転の大きさが、図 7 にみられるように磁場もしくは系の電子密度を変えると、階段状になる効果として観測されることが予想される。面白いのは、この段差が、微細構造定数 $\alpha = e^2/\hbar c$ の程度の量 (ファラデー回転角で言うと、数 mrad）で与えられる。

さらに最近では、この光学量子ホール効果は、通常の 2 次元電子系で池辺等が実験観測に成功している [36]。測定されたのは THz 帯におけるファラデー回転角であり、試料は GaAs/AlGaAs である。これにより、THz 周波数帯においてもプラトー構造が存在することが観測された。同様な実験が、グラフェンでも行われることを期待したい。

AC 領域では、プラトーは DC の場合よりは狭くなるが、ac ホール伝導度におけるプラトー構造が、アンダーソン局在を反映するのであるから、スケーリング解析をすることが必須となる。特に、ac ホール伝導度に対しては動的スケーリング問題となる。森本等は光学ホール伝導度の動的スケーリングによる解析も理論的に行っている [37]。動的スケーリング指数 $z \simeq 2$ などに関しては、ディラック粒子は、ポテンシャル不規則性のもとでは通常のフェルミオンと似た振る舞いをするという結果が得られた。これも、蜂の巣格子に行くと振る舞いが異なる [38]。

5　光誘起ホール効果

グラフェンのディラック・コーンについては、真に面白いことの一つは、このような特異な分散に付随して、量子力学の位相が絡む現象、つまり、所謂 Berry の位相が絡む現象があるか、という点であろう。量子ホール効果が既に、量子ホール効果を与えるトポロジカル量子数（チャーン数）が、Berry の位相から構成される Berry curvature （ベリーの曲率）の積分というトポロジカル不変量である、という意味で Berry の位相が絡んでいる。それ以外にもあるだろうか。

ここでは、その一つとして、岡等により提案されたグラフェンにおける光誘起ホール効果 (photovoltaic Hall effect) という現象を取り上げてみよう [39]。キーワードはディラック電子と「光による電子状態のトポロジーの制御」である。そこでは、系に一様磁場をかけるのではなく、円偏光した光を照射する。これによって、k 点をディラック・コーンの周りを回転させ（図 8(a)）、それに伴う Berry の位相により (DC) ホール電流が誘起される、という光誘起ホール効果 (photovoltaic Hall effect) が提案される。この効果は純粋に非平衡、非線形効果であり、実際、ホール伝導度は、当てるレーザー光の強度の二乗に比例する。これにより、「ゼロ磁場におけるホール効果」が発生する。

先ず、グラフェンに関して、どんなホール効果が期待されるかを分類してみよう。

(a) 量子ホール効果

これは、上で解説した。一様な外部磁場中で起きる。

(b) スピン・ホール効果

これは、Kane と Mele により提案されたもので、ディラック・コーン分散をもつ系において、スピン・軌道相互作用を考えると、トポロジカル系における大きな話題となっているスピン・ホール効果が生じる、という理論的予言である [40]。スピン・軌道相互作用が存在すると、上で導入した２行２列のハミルトニアンは、

$$H(\boldsymbol{k}) \propto k_x\sigma_x + k_y\sigma_y + m\sigma_z \tag{8}$$

$$= \begin{pmatrix} m & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -m \end{pmatrix} \tag{9}$$

のようになり、この対角成分（質量項 m）のために、コーンにはギャップが開き、トポロジカル絶縁体となる。この系の端状態がスピン流を運ぶ、というのが量子スピン・ホール効果のシナリオである。ちなみに、量子スピン・ホール効果は線形応答現象である。Kane-Mele の元々の提案はグラフェンに対して行われたが、炭素は軽元素であるから、スピン・軌道相互作用は小さ過ぎて、結局観測されたのは HgTe/CdTe という系であった。

(c) 光誘起ホール効果

ここでは、グラフェンに円偏光を当てる。当て続けて定常状態になった状況で、ホール伝導度を測定するために付けている試料両端の電極間に DC ホール伝導が発生する。Kane-Mele では、スピン・軌道相互作用が時間反転対称性を破ったが、ここでは、円偏光が破っている。従って、ホール伝導が（外部からの一様磁場は存在しないにもかかわらず）発生しても構わない。当てる右円偏光を左円偏光に変えれば、ホール電流の向きも反転する。

ac 電場中のディラック電子系のハミルトニアンは、

$$H(\boldsymbol{k}, t) = v_F[-(k_x - eA_x^{\mathrm{ac}})\sigma_x + (k_y - eA_y^{\mathrm{ac}})\sigma_y] \tag{10}$$

となる。$\boldsymbol{A}^{\mathrm{ac}}$ は光の電磁場を表わすベクトル・ポテンシャルであり、円偏光の ac 電場であれば、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{ac}} = (eE_{\mathrm{ac}}/\Omega)(\cos\Omega t, \sin\Omega t)$ となり、Ω は光の周波数、E_{ac} が電場強度を表す。

電気伝導の解析には、普通は線形応答理論を使う。ところが、強いレーザー光照射の元での電気伝導を考えようとすると、線形応答理論を超える必要がある。そこで、我々は強い ac 電場中の電気伝導のための拡張された久保公式を先ず導いた

[39]。こんな拡張が可能なのは、ac 電場中の時間依存シュレディンガー方程式は、フロッケ (Floquet) の方法というものを用いることによって、時間依存しない問題に焼き直せるからである。空間的に周期的なポテンシャル中のシュレディンガー方程式の解がブロッホ状態で表されるように、時間的に周期的なポテンシャル中のシュレディンガー方程式はフロッケ状態というものとなる。

この状態を基底に用いると、強い ac 電場中の試料において、電流を測るために付けた電極に加えた弱い dc 電場に対する応答、つまり光誘起電気伝導率は、

$$\sigma_{xy}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{ac}}) = i\int \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^d}\sum_{\alpha,\beta\neq\alpha}\frac{[f_\beta(\boldsymbol{k}) - f_\alpha(\boldsymbol{k})]}{\varepsilon_\beta(\boldsymbol{k}) - \varepsilon_\alpha(\boldsymbol{k})} \times\frac{\langle\langle\Phi_\alpha(\boldsymbol{k})|J_y|\Phi_\beta(\boldsymbol{k})\rangle\rangle\langle\langle\Phi_\beta(\boldsymbol{k})|J_x|\Phi_\alpha(\boldsymbol{k})\rangle\rangle}{\varepsilon_\beta(\boldsymbol{k}) - \varepsilon_\alpha(\boldsymbol{k}) + i0} \tag{11}$$

となる（詳細は [39]）。ここで α はフロッケ状態 $\Phi_\alpha(\boldsymbol{k})$ のラベル、$f_\alpha(\boldsymbol{k})$ は非平衡定常状態の分布関数、$\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{k})$ はフロッケの擬エネルギーと呼ばれる量である。$\boldsymbol{J} = \partial H/\partial\boldsymbol{A}$ は電流演算子、$\langle\langle ... \rangle\rangle$ は二つのフロッケ状態間の行列要素（の時間平均）である。この表式は通常の久保公式とよく似ている。実際、この光誘起電気伝導の拡張久保公式は通常のエネルギー固有値の代わりにフロッケ状態を基底としたことに対応し、ac 電場の強度 E_{ac} を無限小にすると当然ながら通常の久保公式に戻る。さらに、ホール伝導率については簡単な代数変形によって

$$\sigma_{xy}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{ac}}) = e^2\int \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^d}\sum_\alpha f_\alpha(\boldsymbol{k})\left[\nabla_{\boldsymbol{k}}\times\mathcal{A}_\alpha(\boldsymbol{k})\right]_z \tag{12}$$

というコンパクトな表式になる ($\nabla_{\boldsymbol{k}} \equiv \partial/\partial\boldsymbol{k}$)。ここで $\mathcal{A}_\alpha(\boldsymbol{k}) \equiv -i\langle\langle\Phi_\alpha(\boldsymbol{k})|\nabla_{\boldsymbol{k}}|\Phi_\alpha(\boldsymbol{k})\rangle\rangle$ という微分演算子の期待値は一種の「ゲージ場」であり、それから作られる「有効磁場」に相当する

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{k}} = \nabla_{\boldsymbol{k}}\times\mathcal{A}_\alpha(\boldsymbol{k}) \tag{13}$$

は「光誘起ベリー曲率」と呼べる。

結局、光誘起ホール効果は、この光誘起ベリー曲率の積分となるが、これが大きくなるためには、(a) エネルギー・ギャップと (b) トポロジーが重要である。ディラック・コーンに強い円偏光を当てると、先ずギャップが開く。円偏光誘起ギャップである。一方、トポロジーが重要なのは、ホール係数がベリー曲率の全ブリュアン帯に亘る積分になっているためである。特定の波数でベリー曲率が有限になっていても、積分すると消える場合は往々にしてある。例えば、グラフェンの場合には K、K’ という二個のディラック点があるが、時間反転対称性を破らない摂動（たとえば、蜂の巣格子の AB 部分格子に異なるポテンシャル) を加えてギャップを開かせたような単純な場合は、二つの点の寄与はキャンセルしてしまいホール効果は生じない。

円偏光中のディラック電子のフロッケ状態の擬エネルギーは

$$\varepsilon_\alpha = \langle\langle\Phi_\alpha|H(t)|\Phi_\alpha\rangle\rangle + \Omega\gamma_\alpha^{\mathrm{AA}}/2\pi \tag{14}$$

のように動的位相 (第一項) と、アハロノフ＝アナンダン (Aharonov-Anandan) 位相 (第二項) の和となる。アハロノフ＝アナンダン位相というのは、断熱変化に対して定義されるベリー位相を、非平衡に拡張したときに定義される位相である。特に、ディラック点においては $\gamma_\alpha^{\mathrm{AA}} = \pi\{[4(E_{\mathrm{ac}}/\Omega^2)^2+1]^{-1/2}-1\}$ で与えられる。この擬エネルギー分散は、図 8(c) で示すように、ディラック点（$\boldsymbol{k} = 0$) において $2\kappa = \sqrt{4(E_{ac}/\Omega)^2+\Omega^2}-\Omega$ のギャップが開いており、これはアハロノフ＝アナンダン位相のためである。光誘起ベリー曲率は、ディラック点の近くでは

$$[\nabla_k \times \mathcal{A}_\alpha(\boldsymbol{k})]_z \sim \frac{1}{2}\kappa\left(|\boldsymbol{k}|^2+\kappa^2\right)^{-3/2}, \tag{15}$$

となり、カイラリティ(K 点か K’ 点か、ということ）によらない（図 8(d)）。このように、ディラック電子に対して発生する光誘起ホール効果は、グラフェンにおいても K、K' 点に対して足し算され、生じることが予言される。直感的には、円偏光電場の元では、k 空間で k 点はディラック・コーンのまわりを周回し、これにより非断熱電荷ポンピング（図 8(b)）が起きる、と見ることができる。

実際のサンプルに光誘起ホール電流が流れる様子を調べるために、有限のグラフェンに電極を接続し、円偏光を照射した時の電流分布を図 9(a) に示した。実際の計算には、非平衡を扱うために、Keldysh グリーン関数も用いるが、詳細は略した。結果を見ると、電極間にも電流が流れるが、それと垂直方向に光誘起ホール電流が流れている様子が見てとれる。ホール電流は電極間の電流よりも大きくなり得る。$I-V$ 特性を図 9(b) に与えるが、照射する円偏光の強度を強くするとホール電流が大きくなる。図 9(b) から、有意なホール電流を得るためには、例えば $F \sim 0.001t(t = 2.7$ eV はグラフェンのホッピング) 程度が必要とすると、フォトンのエネルギー $\Omega \sim 1$ eV, 格子定数 $a = 2.6$ A に対しては、レーザー光の電場は $E \sim 10^7$ V/m という、現実的な範囲内の値がえられる。また、光誘起ホール効果を、電気伝導で観測するのではなく、偏光で観測する all-optical な方法も提案されている [41]。また、グラフェンだけでなく、もっと一般に、多層グラフェンや、多バンド系でも光誘起ホール効果が生じることを示すこともでき、実験的な検証が期待される。

6　おわりに

最後に、ディラック電子に関するいくつかの話題を挙げて本稿を閉じよう。

様々な系におけるディラック・コーン

鉄系超伝導体 [42] でも、バンド分散にはディラック・コーンが現れる [43]。この物質でフェルミ面は複数のポケットから成るが、フェルミ面上で波動関数がどのような鉄の d 軌道（$d_{x^2-y^2}, d_{xy}$ など複数存在する）の性質をもつのかを見ると、一つのポケットを一周するにつれ、性質が複数の軌道の間を移り変わる。このようなことが起きる原因をたどってゆくと、E_F のかなり下の方でバンドが交差してお

り、この交差を子細に見るとディラック・コーン的になっている。さらに、鉄系超伝導体は、ドープしないときはSDW状態をとるが、この状態においても、バンド分散はディラック・コーンをとり、実験的にもARPES（角度分解光電子分光）で観測されている [44]。有機物質におけるディラック・コーンは上で触れた。

全く異なるカテゴリーの系として、最近ではphotonic graphen（光学格子を蜂の巣状に作ったもの）も考えられている [45]。

超伝導

グラフェンでは、既に分数量子ホール効果が観測されており、これで超伝導が出れば、多体系としての性質をさらにに示すことになる。グラフェンにおける超伝導については、理論的な提案はいろいろなされている。グラフェンの面内フォノン・エネルギーが大きいということは有利な点であるが、ディラック分散自身は、超伝導に有利となる可能性は最初からはあまり思いつかない（逆に、ディラック点でゼロとなる状態密度は、超伝導に不利な要因)。蜂の巣格子上で超伝導を考えると、例えばUchoa等 [46] は、この格子において on-site 相互作用 U と、off-site 相互作用 V（その起源は問わない）を考えるモデルで、U が斥力、V が引力の場合に p+ip ペアリングをもつ超伝導を示唆している。このペアリングでは時間反転対称性が自発的に破れているが、このこと自体は、一般に空間群が２次元表現をもつ場合には起き得てよい現象である。グラフェンを積層させたグラファイトにおいては、層間に別の原子を挿入すると超伝導になることが昔から良く知られており、最近では CaC_6 で比較的高い（約 12K）の Tc が出て話題になった。グラファイトでは、炭素原子層と、別の相との間に振幅をもつ interlayer 状態が効くことがあり [47]、このあたりも含めてグラフェンでどうなるかは将来の課題であろう。特に、トポロジカルな理由で面白いことがあれば、グラフェン特有な超伝導となろう。

ディラック電子の質量

原子が蜂の巣格子に並んだものは、ディラック・コーン分散をもつが、これはあくまで、電子間相互作用を無視した一体問題の範囲内、など、様々に理想化した場合である。実際には、コーンにギャップがあき、ディラック粒子は質量をもっていると解される実験もいろいろあるので、重要な問題となっている。理論的には、ギャップが開くメカニズムに対して、初期の段階から様々なものが提案されている。

代表的なものの一つは、励起子相 (excitonic phase) であり [48]、励起子相というのは普通は、半導体的なバンド構造において、価電子帯に詰まった電子が、伝導帯にたたき挙げられたような状態の方がエネルギー的に得であれば、そのような状態を自発的にとることを言う。伝統的な固体物理でも長年の研究がある。ディラック・コーンもゼロ・ギャップではあるが２バンド系であり、励起子相は多体状態の候補になり得る。実際、上で触れた π-flux state も含んだ多くの研究がある。最近では、グラフェンについて、荒木等 [49] は、QCD（量子色力学）とのアナロジーに着目しながら、励起子相を調べている。電子は荷電粒子であるから、当然電磁場と相互作用する。この結合まで取り入れるためには、作用 S にこの結合を取り

入れておけばよい [50]。

この他、上で解説した分数量子ホール効果、SU(4) 対称性の自発的破れ [51]、Peierls 歪み [52]、ボンド秩序 [53] などがある。これらのうち、どれが実現するのか、実験との比較も含めて、将来の課題であろう。

稿を閉じるにあたり、グラフェン関係の研究では、共同研究者の初貝安弘、福井隆裕、森本高裕、河原林 透、有川晃弘、渡辺悠樹の各氏に感謝したい。また、安藤恒也、越野幹人、Andre Geim, Kostya Novoselov, Marek Potemsky, Eva Andrei の各氏には様々な議論をいただいた。グラフェンの研究は一部、科学研究費基盤研究 B「対称性の破れを伴わない量子液体相:幾何学的位相による理論とその応用」の援助を受けている。

参考文献

[1] K.S. Novoselov et al, Nature 438, 197 (2005); A.K. Geim and K.S. Novoselof, Nature Materials 6, 183 (2007); A.H. Castro Neto et al, Rev. Mod. Phys. 81, 109 (2009).

[2] A.H. Castro Neto et al, Rev. Mod. Phys. 81, 109 (2009).

[3] D.S.L. Abergel, V. Apalkov, J. Berashevich, K. Ziegler and Tapash Chakraborty, Adv. Phys. **59** (2010) 261.

[4] 斉木幸一朗、徳本洋志（編）「グラフェンの機能と応用展望」（CMC 出版、2009）。

[5] 初貝安弘、青木秀夫、「固体物理」、印刷中。

[6] Michio Kaku: *Quantum field theory: a modern introduction* (Oxford University Press, 1993).

[7] M. Creutz, JHEP **17**, 0804 (2008).

[8] 片山新也、小林晃人、鈴村順三：日本物理学会誌 **62**, 99 (2007)；田嶋尚也、梶田晃示、固体物理、出版予定。

[9] N. Tajima et al, Phys. Rev. Lett. 102, 176403 (2009).

[10] Y. Hatsugai, T. Fukui, and H. Aoki, *Phys. Rev. B* 74, 205414 (2006).

[11] Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, and P. Kim. *Nature* 438, 197, 2005.

[12] Y. Zheng and T. Ando, *Phys. Rev. B* 65, 245420 (2002).

[13] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B **185**, 20 (1981); **193**, 173 (1981).

[14] G. W. Semenoff, A. J. Niemi and Y.-S. Wu, Nucl. Phys. B **276**, 173 (1986); A. J. Niemi and G. W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **51**, 2077 (1983); A. Redlich, ibid. **52**, 18 (1984).

[15] M. V. Berry, Proc. R. Soc. A **392** 45 (1984).

[16] Haruki Watanabe, Yasuhiro Hatsugai and Hideo Aoki, Phys. Rev. B(R) 印刷中 (arXiv:1008.0130).

[17] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).

[18] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988).

[19] H. Watanabe, Y. Hatsugai and H. Aoki, submitted to Proc. HMF-19, Fukuoka, July 2010 (arXiv:1009.1959).

[20] N. Goldman et al, Phys. Rev. Lett. **103**, 035301 (2009).

[21] M. Z. Hasan and C. L. Kane, arXiv:1002.3895.

[22] K. Nomura et al, Phys. Rev. Lett. **100**, 246806 (2008).

[23] T. Kawarabayashi, Y. Hatsugai, and H. Aoki, *Phys. Rev. Lett.* 103, 156804 (2009).

[24] A. Tzalenchuk et al, nature nanotech. **5**, 186 (2010).

[25] K.I. Bolotin et al, Nature **462**, 196 (2009).

[26] 中島龍也、青木秀夫：「分数量子ホール効果」（東京大学出版会、1999）。

[27] V. M. Apalkov and T. Chakraborty, Phys. Rev. Lett. 97, 126801 (2006).

[28] N. Shibata and K. Nomura, J. Phys. Soc. Jpn **78**, 104708 (2009).

[29] S.D. Sarma et al, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 166802.

[30] K. Shizuya, Phys. Rev. B **81**, 075407 (2010).

[31] W. Kohn, Phys. Rev. **123**, 1242 (1961).

[32] H. Aoki, Appl. Phys. Lett. **48**, 559 (1986).

[33] Takahiro Morimoto, Yasuhiro Hatsugai and Hideo Aoki, Phys. Rev. B **78**, 073406 (2008).

[34] P. Plochocka et al, Phys. Rev. B **80**, 245415 (2009).

[35] Takahiro Morimoto, Yasuhiro Hatsugai and Hideo Aoki, Phys. Rev. Lett. **103**, 116803 (2009).

[36] Y. Ikebe, T. Morimoto, R. Masutomi, T. Okamoto, H. Aoki and R. Shimano, Phys. Rev. Lett. **104**, 256802 (2010).

[37] Takahiro Morimoto, Yshai Avishai and Hideo Aoki, Phys. Rev. B **82**, 081404(R) (2010).

[38] Tohru Kawarabayashi, Takahiro Morimoto, Yasuhiro Hatsugai and Hideo Aoki, Phys. Rev. B 印刷中 (arXiv:1008.2614).

[39] T. Oka and H. Aoki, Phys. Rev. B **79**, 081406R (2009); *ibid.* **79**, 169901 (2009).

[40] C. L. Kane and E. J. Mele, *Phys. Rev. Lett.* 95, 146802 (2005).

[41] T. Oka and H. Aoki, arXiv:1007.5399.

[42] 黒木和彦、有田亮太郎、青木秀夫、日本物理学会誌 **64**, 826 (2009)。

[43] H. Fukuyama, J. Phys. Soc. Jpn., Online-News and Comments [May 12, 2008] ; K. Kuroki, S. Onari, R. Arita, H. Usui, Y. Tanaka, H. Kontani and H.Aoki, New J. Phys. **11**, 025017 (2009).

[44] P. Richard et al, Phys. Rev. Lett. **104**, 137001 (2010).

[45] S.R. Zandbergen and M.J.A. de Dood, Phys. Rev. Lett. **104**, 043903 (2010).

[46] B. Uchoa and A.H. Castro Neto, Phys. Rev. Lett. **98**, 146801 (2007).

[47] G. Csanyi et al, Nature Phys. **1** (2005) 42.

[48] V.P. Gusynin et al, Phys. Rev. B **74** (2006) 195429; J. E. Drut et al, Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 026802.

[49] Y. Araki and T. Hatsuda, Phys. Rev. B **82**, 121403(R) (2010).

[50] D.T. Son, Phys. Rev. B **75**, 235423 (2007).

[51] K. Nomura and A.H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **96**, 256602 (2006).

[52] J.M. Fuchs and P. Lederer, Phys. Rev. Lett. **98**, 016803 (2007).

[53] Yasuhiro Hatsugai, Takahiro Fukui and Hideo Aoki, Physica E **40**, 1530 (2008).

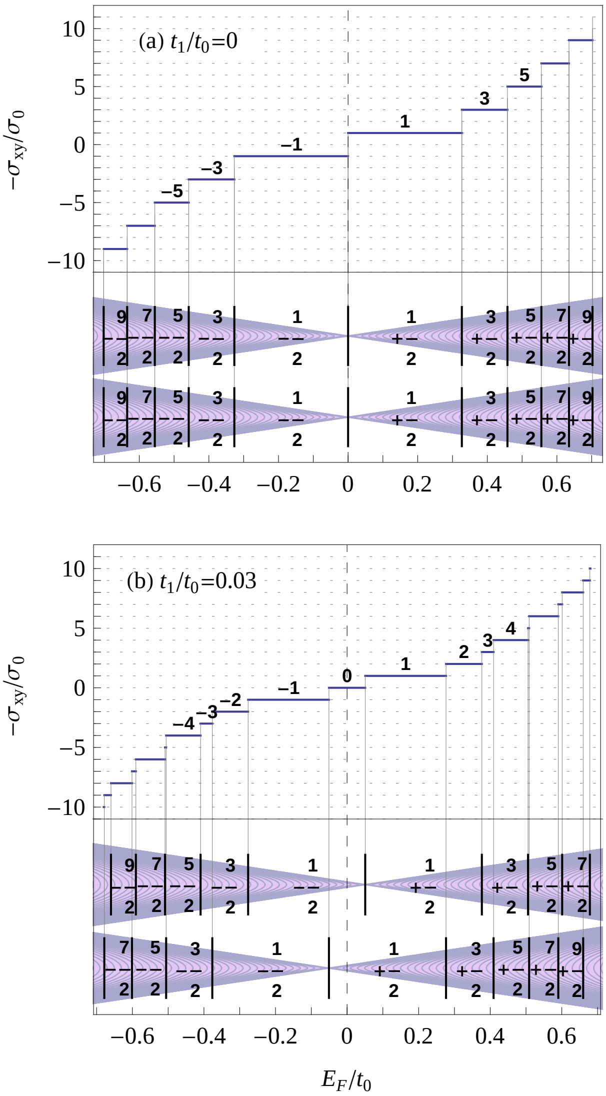

図 4: 普通の蜂の巣格子 (a) と、ここで考えた格子模型 (b) に対して、上半パネルは、数値的に計算されたチャーン数を E_F に対して示す。下半パネルは、各ディラック・コーンに対するランダウ準位の位置と、割り当てられたチャーン数を示す。[16]。

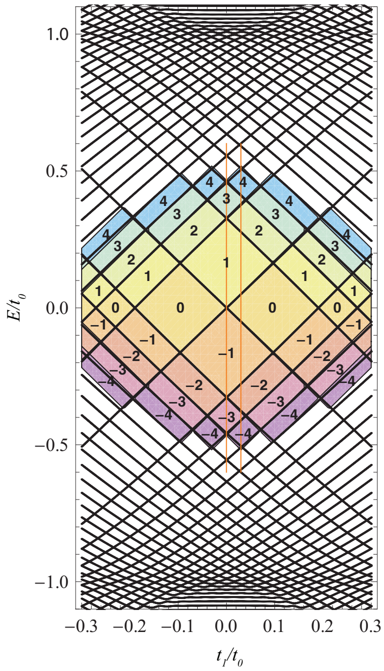

図 5: 図 3 で考えた格子模型に対して、数値的に計算されたランダウ準位の位置を、二個のディラック・コーンの間のずれ ($\Delta \propto t_1$) に対してプロット。ランダウ準位間の各ギャップに対してチャーン数も添えた。色付けされたチェッカーボードは、各ディラックク・コーンに $\cdots, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, \cdots$ のチャーン数を割り当てた場合に期待されるもの。$E = \pm 1$ 付近でランダウ準位が密集しているのは、van Hove 特異点近傍であるため。[16]。

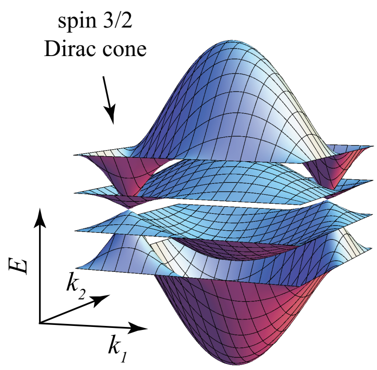

図 6: SU(2) の N 次元表現をもつような格子模型では、ディラック点の近傍で、異なるフェルミ速度をもつ複数のディラック・コーンが存在し得る。[19]。

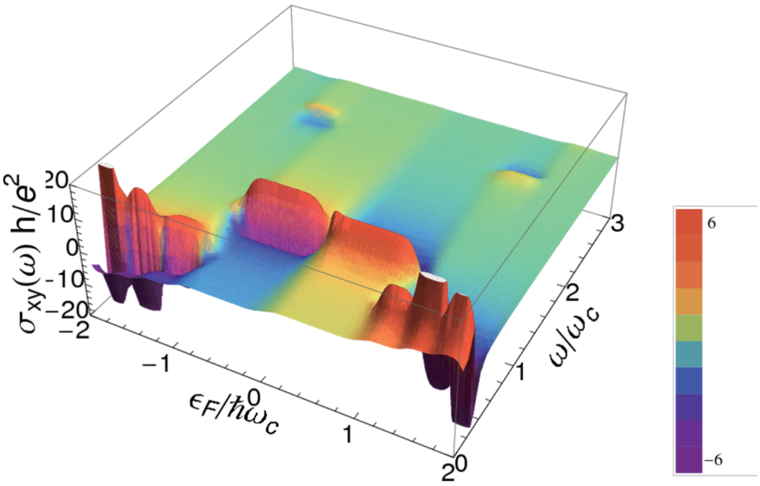

図 7: ディラック量子ホール系における光学ホール伝導度の計算結果を、ϵ_F と光の振動数 ω に対して示す [35]。

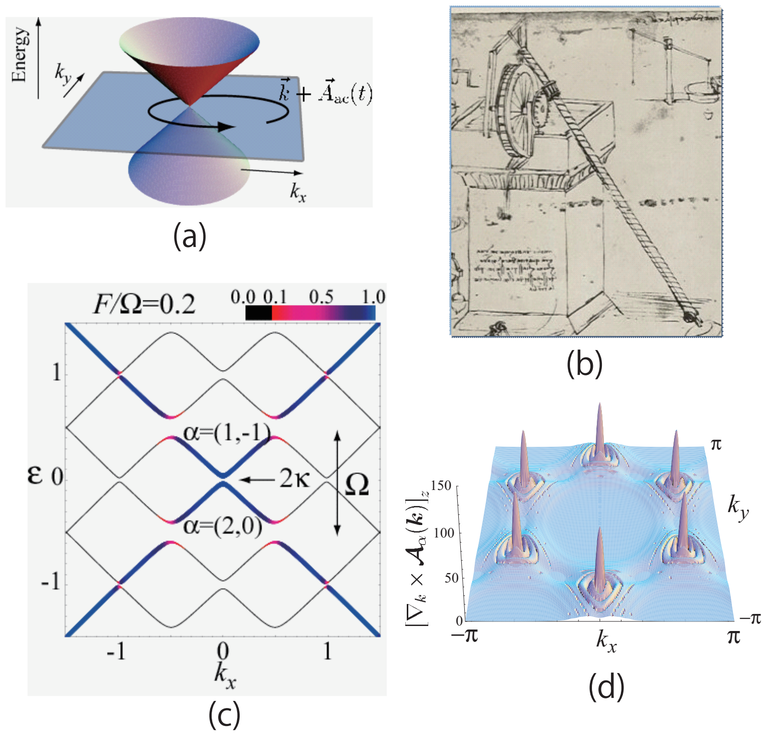

図 8: (a) 二次元ディラック分散。円偏光中では各 k-点はブリュアンゾーン中を円運動し、非断熱幾何学位相を獲得する。(b) ポンピングの概念図 (Leonardo による)。(c) 円偏光のディラック電子のフロッケ擬エネルギー。ディラック点にトポロジカル・ギャップが ac 外場（光）のために開く。(d) 蜂の巣格子に対する光誘起 Berry 曲率。

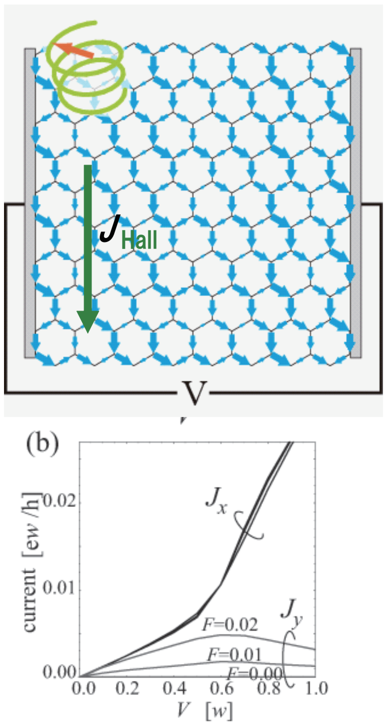

図 9: (a) 円偏光を照射したグラフェンにおける光誘起ホール電流。左右の電極の間に電圧がかかっている。(b) 縦電流 J_x とホール電流 J_y に対する $I-V$ 特性。