別冊・数理科学『場の理論』
1999年4月10日発行

III. 物性物理と場

物性物理におけるゲージ場理論

青木 秀夫

1. はじめに

国際会議に出るために海外旅行するときの楽しみの一つは，飛行機の中で十数時間本が読めることであろう．数年前カナダに行ったときは，バンクーバー空港で買った恐竜発掘の本を息もつかずに読んだが，今年（1996）はベルリンでの半導体物理学国際会議の折りに会場のベルリン工科大学の本屋で見つけたヒルベルト（D. Hilbert）の伝記[1]ががっちりと書かれていて面白かった．ヒルベルトはいわずと知れた今世紀初頭の数学の巨星であるが，量子力学が思いつかれる以前にその基礎となる関数空間論を作っていた男，無二の親友ミンコフスキー（H. Minkowski）も相対論の基礎となる4次元の幾何学を作っていたという訳で，物理にもなじみが深い．1900年に，新世紀（即ち20世紀）への展望として提出された有名なヒルベルトの23の問題は，いまでも時々第何問題が解決したというような新聞記事が出る[2,3]．さて，この伝記の後半に現れる，ヒルベルトの後継者にワイル（H. Weyl）がいる．この人こそ，ゲージ場の生みの親の一人といえる．私も学生の頃，彼の名著である 'Raum, Zeit, Materie'（「空間，時間，物質」：一般相対論提案の2年後に書かれた解説書で，リーマン幾何の発展すべき方向――微分幾何を示唆した）を英訳で読んだ覚えがある．固体物理においても，正に物質を空間に置くのだから，ゲージ場が問題になってよいはずだけれども，この可能性が真剣に検討され始めたのは，この十数年にすぎない．つまり，1980年代に湧き起こった物性物理の分数量子ホール効果[4]と高温超伝導が人々の考え方を変革した訳で，一種の Sturm und Drang（疾風怒涛）といえる．歴史の妙を感じさせるのは，酸化物という絶縁体（高温超伝導の舞台）と，半導体界面（量子ホール効果の舞台）は一見無関係に思えるのに，数理科学的には「ゲージ場」によって理解することも可能という意味で関連しており，その二つのテーマが同年代に発生したことである[5]．

ゲージ場は，物性物理では様々な起源で導入されている．最近の流れでは，

(i) 高温超伝導体で，強い電子間斥力により同一の軌道に2つの電子が来にくい．この「強い電子相関」を，拘束条件をゲージ場で表す，という図式に従いゲージ場が導入されている．詳しいことについては，文献6,7) などがある．

別の表現をすると，電子はスピンという内部自由度を持っているので，電子（または電子の抜け穴である正孔）が遍歴するときにスピン量子化軸が変化することによる Berry の位相[8]をピックアップする．したがって，例えばある経路にそって電子が一周しても状態は元には戻らない[9,10]．実際，このようなことは1次元空間ですら存在する．1次元の鎖上の原子の集まりで，2電子が同一の原

子に鉢合わせしたときのみ U という斥力相互作用する，とした模型を1次元ハバード模型というが，U が無限大のとき，この系ではスピン自由度と電荷自由度は分離するとされている．しかし，このときでも1次元では求められる厳密解（ベーテ仮説解）を見ると，電子の波数 k_j は

$$N_a k_j = 2\pi\left(I_j + (1/N)\sum_\alpha J_\alpha\right)$$

（N_a は原子数，I_j は離散的に量子化された波数を指定する整数，N は電子数，J_α はスピン波動関数の量子化波数を指定する整数）で与えられ，電荷状態を指定する k_j にスピン自由度も介入していることがわかる[11]．つまり，電荷が動くときは，スピン自由度に足を引っ張られる．この現象は，有限の U に対しても存在する（図1）[9]．

(ii) 本稿で主に話題にしたい分数量子ホール効果[4]では，2次元空間を外部磁場中で走る電子を考えるが，これを Chern–Simons（チャーン・サイモンズ）場の理論で扱うことができる．磁場中でも勿論電子は強く斥力相互作用しているから，分数量子ホール効果も「強い電子相関」の問題となるが，第3，4節で説明するように2次元空間で許されるフェルミオンとボソンの間の変換などが直観像を多彩にする．ここで現れた Chern–Simons 場というのは，数学的にはベクトル束の微分幾何学的に出てくる概念で[12]，空間の計量によらないある外微分形式の積分で表されるので，トポロジカルな場と呼ばれることもある．

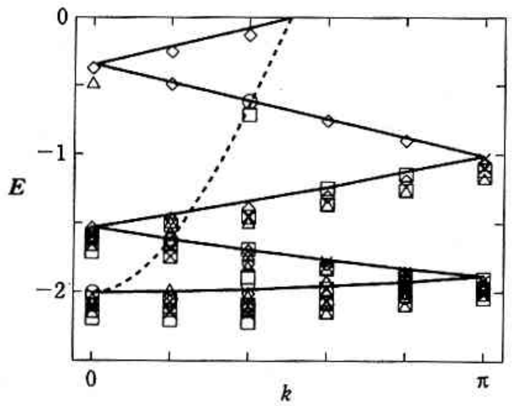

図1　強相関電子系（1原子の上には2電子が来ると U というエネルギーを損する）では，正孔（電子の穴）が（遷移確率 t で）動くときには，スピン自由度と干渉して質量が重くなる．有限系で $U = 100t$ の場合の励起準位を波数 k に対してプロットし，重いモードを実線で結んである[9]．点線は，比較のために電荷とスピンの絡みがない場合の分散を示す．

このような，物性物理と場の理論との交流は，例えば湯川国際セミナーとして「低次元場の理論と物性物理」が行われる[13]など近年特に活発になっている．歴史的にはゲージ場の考えを物性物理に導入したときに，最も劇的な効果の一つはゲージ対称性の破れ，つまり超流動や超伝導であろう．よって，これから説き起こすことにしよう．

2. ゲージ対称性の破れ — 超伝導

超伝導について教科書をひも解くと，「超伝導は単に電気抵抗がゼロになることではない，もしそうなら完全導体（結晶格子欠陥やフォノンがない導体）も超伝導と呼ばねばならなくなる．そうではなく，外部磁場を完全に排除するマイスナー効果が超伝導の本質である」と強調されている．これをさらにゲージ場の言葉でいえば，超伝導とはゲージ対称性が自発的に破れた状態に他ならない．

「対称性の自発的破れ」というのは，相転移の統計力学で導入する大切な概念の一つである．つまり，磁性体を例にとると，元のハミルトニアンはスピン空間での回転対称性を持っているから，スピンが揃ったとしてもどこか特定の方向を向く理由は何もない．にもかかわらず，低温ではどちらかの方向を向いてしまう．一般に，二次相転移の秩序相側（普通は低温側）ではこのようなことが起っている．超流体や超伝導体も然りで，そこで揃ってどこかの方向を向いてしまうのは，波動関数の位相である．但し波動関数といっても，ただの1粒子波動関数ではなく，ボース凝縮した condensate の波動関数である．では，これとマイスナー効果

(完全反磁性）とはどうつながるのだろうか．それは，ゲージ場（いまの場合，電磁場）の横成分は，対称性の破れがあると遮蔽電流（マイスナー効果の源）を生む，という事情があるせいである．

それでは，電磁場中の電流密度 $\boldsymbol{j}$ は，量子力学ではどう表されるだろうか．波動関数

$$\psi(\boldsymbol{r}) \equiv |\psi(\boldsymbol{r})| e^{i\varphi(\boldsymbol{r})}$$

に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j} &= \frac{e\hbar}{2m}[\psi^*(-i\nabla\psi) + \psi(i\nabla\psi^*)] \\ &= \frac{e\hbar}{m}|\psi|^2\nabla\varphi\end{aligned}$$

となる（$-e$ は電子の電荷，m は質量）．ところが，波動関数の位相には不定性があって，各場所で

$$\psi \to \psi(\boldsymbol{r})e^{i\chi(\boldsymbol{r})}$$

という変換（局所 $U(1)$ ゲージ変換）をしても差し支えない．だから，φ の微分を生に含む上の表式はゲージ変換をすると変化してしまうのでまずい．ゲージ不変にするには，ψ に対する微分 ∇ を共変微分 $\boldsymbol{D} = \nabla - i(e/c\hbar)\boldsymbol{A}$ に変えて

$$\boldsymbol{j} = \frac{e\hbar}{m}|\psi|^2\left(\nabla\varphi - \frac{e}{c\hbar}\boldsymbol{A}\right)$$

とすればよい．

この電流密度を，具体的に整数量子ホール系（2次元空間内の自由電子に垂直に強磁場をかけ，不規則ポテンシャルを加えた系）に対して青木により求められた例を図2に示す[14]．ここでは，空間的に局在した波動関数が確かに回転電流を持つこと，端のある系ではこの電流は端にそって流れる反磁性電流になることが見てとれる．

図2では強磁場の例を挙げた．ハミルトニアンも磁場中では運動エネルギー項 $-(1/2m)\nabla^2$ において ∇ を $\boldsymbol{D}$ に置き換えて

$$-\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi = E\psi$$

というシュレディンガー方程式を解かねばならないが，このランダウ量子化問題を強磁場で実行したことになる．

一方，磁場が弱くて摂動と見なしてよい場合はどうだろう．このとき $|\psi|$ はあまり変わらないとして，$\boldsymbol{j} \propto \nabla\varphi - (e/c\hbar)\boldsymbol{A}$ に注目して，$\nabla\varphi$ 項と $(e/c\hbar)\boldsymbol{A}$ 項の意味をそれぞれ見てみよう（$\boldsymbol{A}$ の取り方にはゲージ変換の不定性があるので，この分割はゲージ不変でないが，そのあたりは読者に考えていただこう）．すると $\nabla\varphi$ 項は，電子の軌道角運動量 L_z に比例するから，これによって生じる軌道磁気モーメントは磁場を印加すればこれとカップルして軌道常磁性を生むことになる．

一方，磁場により誘起された電流の方は $\boldsymbol{A}$ に比例する項により，

$$\boldsymbol{j}_D \propto -(e/c\hbar)\boldsymbol{A}$$

と表される（ロンドン方程式）．これにより生じ

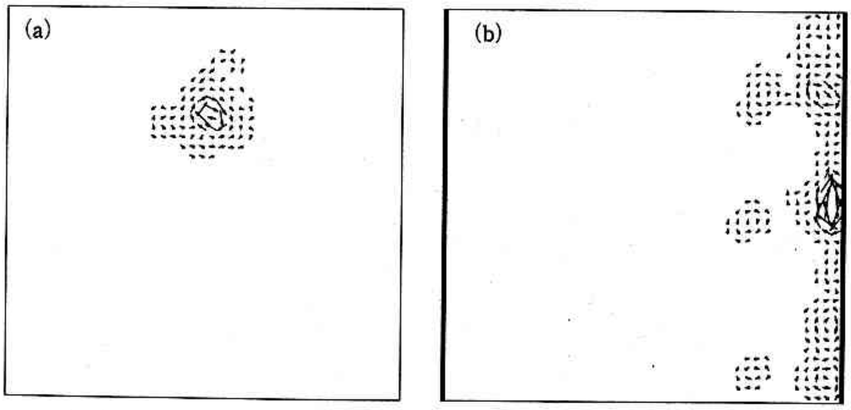

図2　整数量子ホール系（2次元空間内の自由電子に垂直に強磁場をかけ，不規則ポテンシャルを加えた系）の固有波動関数に対する電流密度の典型例[14]．
(a) 周期的境界条件で，不規則性のために空間的に局在した波動関数，(b) 端（ポテンシャル障壁，太線）のある場合．

た磁気モーメントは古典電磁気学でもおなじみの「レンツの法則」により外部磁場をキャンセルする方向，つまり反磁性電流 $\boldsymbol{j}_D$ に対応する．物性の教科書では，これから孤立した原子や分子の磁性は，A^2 の期待値に比例するランジュバン反磁性や，$\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{A}$ とが掛かった項に対応するヴァン・ヴレック常磁性に起因する，というふうに説く．

さて，電子は電荷を持っているから，電流が流れれば「ビオ・サバールの法則」により磁場が生じる，というマックスウェル方程式

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$$

も気にしなければならない（$\mathrm{div}\boldsymbol{j}_D = 0$ とするため，$\boldsymbol{A}$ は横成分（$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$）というゲージを選んでいる）．この式と，反磁性電流 $\boldsymbol{j}_D = (e^2/mc)|\psi|^2\boldsymbol{A}$ をカップルさせると，

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\lambda^{-2}\boldsymbol{A},$$
$$\lambda^2 = mc^2/4\pi e^2|\psi|^2$$

という $\boldsymbol{A}$ が空間的に減衰する式が得られ，遮蔽電流によって磁場 $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ がキャンセルされるために，磁場は λ くらいの「遮蔽長」までしか系の内部に入れないことがわかる．ところが，原子・分子では $|\psi|^2 \sim 1/a_B^3$（a_B はボーア半径 ~ 0.5Å）であり，λ は 100Å の程度となり分子サイズに位べれば大きく，レンツの法則で磁場が遮蔽されることは気にしなくてよいことになる．

さて，原子・分子でなくバルクの金属ではどうなるだろうか．このときも弱磁場ではドラマチックなことはなく，ランダウ（L.D. Landau）が 1930 年に計算したように，弱いランダウ反磁性が生じるだけである．ところが，バルク中の電子が「1 つの波動関数」に落ち込んでしまったらどうであろうか．勿論，起伝導体において巨視的な N 個の電子が，クーパー対をつくって BCS 状態に凝縮することを考えている．

凝縮しているということは，遮蔽長 $\lambda \propto 1/\sqrt{e^2|\psi|^2}$ の式において，$|\psi|^2$ は（1/体積）ではなく（N/ 体積）となって，やはり $|\psi|^2 \sim 1/a_B^3$ となることに現れ，この度は巨視的な系に数百Å しか磁場が侵入しないという訳だから，完全反磁性となる．この λ は超伝導でロンドンの侵入長と呼ばれるもので，典型的な超伝導体であるアルミニウムでは 160Å である．

このような状況で電磁場を支配している方程式

$$(\nabla^2 - M^2)\boldsymbol{A} = 0$$

（$M = 1/\lambda^2 \neq 0$）は，光子場に対するものにもかかわらず，場の理論でいうところの質量を持った（massive）ベクトル場の方程式になっているのが特徴である．但し詳しくは，以上で無視した $\boldsymbol{A}$ の縦成分は電子気体の密度波（プラズマ振動）とカップルするので，massive なベクトル場の完全な記述にはこれを含める必要がある．また，最近ではランダウ量子化が問題となる強磁場における超伝導も論じられている[15]．

上の議論で本質的だった「1 つの波動関数」に落ち込むということは，楊（C.N. Yang）[26] に従い「非対角長距離秩序」がある，と表現することもできる．実際，与えられた電子模型に対してこの秩序を検出する（例えばクーパー対の相関関数を見る）理論的試みは精力的になされており，斥力相互作用を持つ銅と酸素の軌道を取り入れた模型においても対相関が発達し得ることや，さらに基本的なハバード模型でも電子の対の $U(1)$ ゲージ対称性の破れを量子モンテカルロ法を用いて検出したという黒木等による最近の報告もある[16]．

3. 2 次元空間 — 不思議な次元

さて，ゲージ対称性の破れの別の面白い例が量子ホール液体である．しかし，これに話をもっていくには，先ずフェルミオンとボソンの間の変換を導入する必要がある．普通の 3 次元空間では，パウリ（W. Pauli）が 1940 年に示したように粒子のスピンが半奇数ならばフェルミオン，整数ならばボソン，という「スピンと統計との関係」[17] があるから，ボソンをフェルミオンに自由に変換したりはできない．但し，3 次元空間でもボソンとフェルミオンが互いに移り渡ること自体は例が

ない訳ではない．よく知られているのはスカーム (T.H.R. Skyrme) によって与えられた，整数スピン粒子の場から $S=1/2$ を持つ粒子 (skyrmion) が出現する例[18) や，トフーフト (G. 't Hooft) らによる，ボース場からモノポール (フェルミオン) が出現する例[19) であろう．

しかし，2次元空間が面白いのは，こんな特別な例を考えなくても粒子の統計性を一般的に変える可能性を内蔵していることである．これは，粒子の世界線を追跡したときに，3次元空間ではある粒子が別の粒子に何回巻き付かれたかなどということは，数えようと思っても，世界線を連続変形して絡みをほどくことができるので，とても定義できない．ところが，2次元では図3に例示するように，この巻き数を曖昧さなく数えることができる．巻かれたときの波動関数の位相を問題にすればよいので，次のようなことを考えることができる．

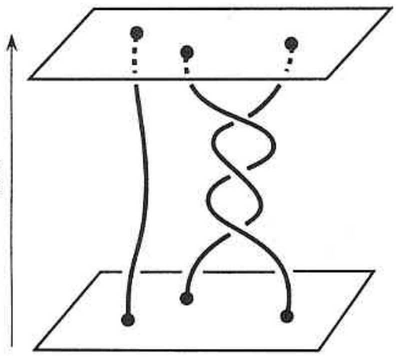

図 3　粒子の世界線を追跡したときに，2次元空間ではある粒子が別の粒子に何回巻き付かれたかを，曖昧さなく数えることができる．

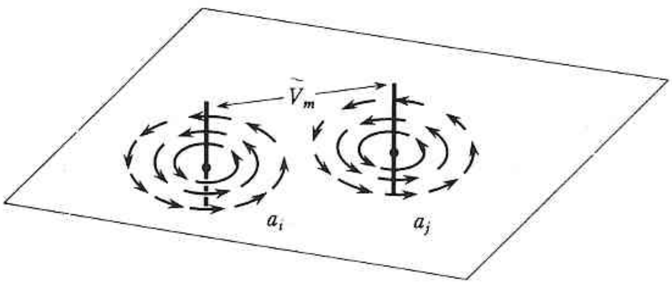

図 4　各粒子に太さが無視できる磁束 (黒線) を貼りつける．渦状のベクトルは磁束によるベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{a}$ を示す．$\widetilde{V}_m$ は磁束付き電子同志の相互作用．

例えば，図4に示すように，各粒子に太さが無視できるフィラメント状の磁束を磁束量子 Φ_0 を整数個だけ貼りつけたとする．この磁束は図に示したような渦状のベクトル・ポテンシャルを持つ．こんな磁束があると，それによる AB (Aharonov–Bohm) 効果のために波動関数は磁束を回る毎に余計な位相をもらうから，その位相は図5に示したようになる．

このような「電子＋磁束 m 本」複合体を考え，それら2個を互いに他の周りを回したときの AB 効果による位相を計算すると，磁束量子を偶数本つけたときは複合粒子はボソン，奇数本のときはフェルミオンであることがわかる．これは，粒子の交換に際して電子本来のフェルミ統計性からくる因子と，荷電 $-e$ が他電子に貼られた磁束 $m\Phi_0$ の周りを回るときに獲得する AB 位相の「合計」として $(-1)^{m+1}$ という因子が出てくるためと理解できる．これが「複合粒子 (composite particle)」の考え方である．場の理論では Chern–Simons 場を導入したことに他ならない．

これは，式の上で統計変換をもたらすゲージ変換を導入して確かめることもできる．それはフェルミオン場の演算子 $\Psi(\boldsymbol{x})$ を，1次元での Jordan–Wigner 変換を2次元に拡張したような感じの

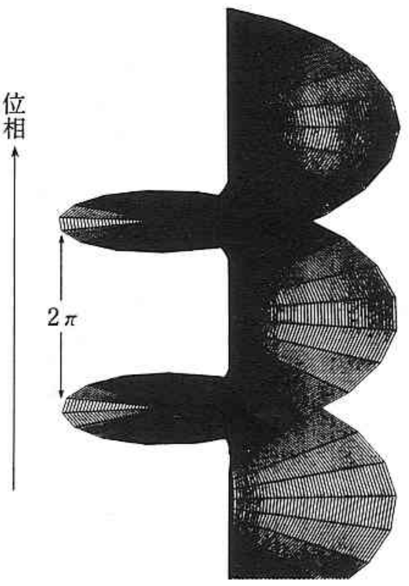

図 5　フィラメント状磁束 (太線) の周りの波動関数の位相．

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = e^{-iJ(\boldsymbol{x})}\,\Psi(\boldsymbol{x}),$$
$$J(\boldsymbol{x}) \equiv -m \int d\boldsymbol{x}' \rho(\boldsymbol{x}')\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

という変換（ρ は電子の密度演算子）により複合粒子の場の演算子 $\Phi(\boldsymbol{x})$ にしてみよう．ここで，$J^\dagger = J$ なので，この変換はユニタリである．

ここで，$\theta(\boldsymbol{x})$ は 2 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ が x 軸となす角度で，図 5 でわかるように $\boldsymbol{x}=0$ を特異点に持つ．よって，第一量子化では

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_i \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)$$

より

$$J(\boldsymbol{x}) = -m \sum_j \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)$$

となることからわかるように，この変換は 2 粒子が同じ位置に来たときには定義できない．しかし，電子間にはパウリの排他則が働くため，平行スピン 2 電子が同じ位置に来ることはなく，さらにクーロン斥力が働くため，反平行スピン 2 電子でも同位置に来ることはない．但し，m が奇数で複合粒子がボース統計に従うときには，粒子間にデルタ関数型斥力相互作用を加える必要がある[20]．

次に複合粒子の統計性を場の演算子の交換関係から見てみよう．すると，量子力学でお馴染みの

$$e^A\,B\,e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{ad}_A)^n}{n!}\,B$$
$$(\text{但し，}\ \mathrm{ad}_A \cdot B \equiv [A,B])$$

を用いて

$$\left\{\Phi(\boldsymbol{x}), \Phi^\dagger(\boldsymbol{x}')\right\} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \ \ (m\text{ が偶数}),$$
$$\left[\Phi(\boldsymbol{x}), \Phi^\dagger(\boldsymbol{x}')\right] = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \ \ (m\text{ が奇数})$$

が得られる．つまり，複合粒子は確かに m が偶数のときにはフェルミオン，奇数のときにはボソンとなる．

この変換により，ハミルトニアンがどう変わるかを見ると，共変微分 $\boldsymbol{D}$ を $e^{iJ(\boldsymbol{x})}\,\Phi(\boldsymbol{x})$ に演算させると

$$\boldsymbol{D}\,\Psi(\boldsymbol{x}) = \left(\nabla - i\frac{e}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)[e^{iJ(\boldsymbol{x})}\,\Phi(\boldsymbol{x})]$$
$$= e^{iJ(\boldsymbol{x})}\,[\boldsymbol{D} - \nabla J(\boldsymbol{x})]\,\Phi(\boldsymbol{x})$$

となる．ここで $\nabla J(\boldsymbol{x}) = (e/\hbar c)\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ と表すと $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ は，

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \equiv -\frac{m\Phi_0}{2\pi}\int d\boldsymbol{x}'\,\rho(\boldsymbol{x}')\,\nabla_{\boldsymbol{x}}\,\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

である．これを用いると，Φ に対してはハミルトニアン中の共変微分 $\boldsymbol{D}$ を

$$\nabla - i\frac{e}{c\hbar}\,[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})]$$

とすればよいことがわかる．この $\boldsymbol{a}$ が，粒子の統計性を変換したために現れる「統計的（Chern–Simons）ゲージ場」に他ならない．実際，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ は第一量子化では，各粒子の位置に磁束量子を m 本貼り付けたときのベクトル・ポテンシャルになっている．

2 次元ではさらに大胆に，フェルミオンとボソンの中間の統計である分数統計を考えることもでき，整数でない磁束を貼り付けることにより分数統計性を持つエニオン（anyon）と呼ばれる粒子を構成できる[21,22]．しかし，そこまで行かなくとも，フェルミオンとボソンだけを考える範囲内ですら，統計変換のような面白いことができる，というのが味噌である．ちなみに，ディラック（Dirac）は，その有名な量子力学の教科書[23]で既に，多体波動関数は完全反対称（フェルミオン）か完全対称（ボソン）とは限らないのに，自然はこの折角の（いまでいえばエニオンの）可能性を活用していない，と文句をいっているのは流石といえる．

4. ゲージ対称性の破れ—量子ホール液体

ゲージ不変性は既に整数量子ホール効果を理解する上で有用である[4,24]．しかし，分数量子ホール状態は，超伝導と同様ゲージ対称性の破れた状態である点で際だっている[4]．実際，上で導入した磁束を貼りつける，という操作は，分数量子ホール状態（量子液体なので分数量子ホール液体と呼ばれる）に超伝導に類似の非対角長距離秩序があることにガーヴィン（Girvin）ら[27]が注目したことに端を発している．

それには，先ず分数量子ホール効果の複合粒子理論[4,7]を見る必要がある．分数量子ホール系は，

2次元空間に閉じこめられた，クーロン斥力相互作用する電子に，垂直に強磁場（サイクロトロン・エネルギーの方がクーロン・エネルギーより大きいような）をかけた系である．ここで，一様外部磁場を $m\Phi_0$ ごとに人工的に束ね太さゼロのフィラメント状にして，各電子に付着させて減らすことを考える．量子ホール系においては電子密度は，電子がランダウ準位をどの位満たしているか，という「ランダウ準位占有率 ν」で指定される．言い替えると，ν^{-1} が1電子当たりの外部磁束量子の本数である．これから，複合粒子にとっての実効的な磁場 $\boldsymbol{B}_{\text{eff}} \equiv \nabla \times [\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})]$ は，電子密度の空間平均 $n_e \equiv \overline{\rho(\boldsymbol{x})}$ とそこからの揺らぎ $\delta\rho(\boldsymbol{x}) \equiv \rho(\boldsymbol{x}) - n_e$ を使って

$$\begin{aligned} B_{\text{eff}} &= B - m\Phi_0\,\rho(\boldsymbol{x}) \\ &= \left(\nu^{-1} - m\right)\Phi_0 n_e - m\Phi_0\,\delta\rho(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

と表せ，空間平均をとると $\overline{\delta\rho} = 0$ だから

$$\overline{B_{\text{eff}}} = \left(\nu^{-1} - m\right)\Phi_0 n_e$$

となる．

よって，ランダウ準位占有率が $\nu = 1/(2k+1)$ のように奇数分母のとき，各電子に付着させる磁束量子の数を $m = 2k+1$ にとると，実効磁場は平均的には丁度ゼロになってしまう．よって，平均場近似では磁場がないときの2次元ボース粒子系と等価となり，基底状態はもちろんボース凝縮状態である．

一方，$\nu = 1/2k$ のように偶数分母のときは，m を $2k$ という偶数にとると，実効磁場はやはり平均的にはゼロになり，平均場近似では磁場がないときのフェルミ粒子系となる．そして，それから磁場がずれると複合粒子は平均的には $B_{\text{eff}} = B - B_{\nu=1/2k}$ を感じるため，$\nu = N/(2kN+1)$（N：整数）のとき，外部磁場を磁束量子 $2k$ 本ずつに束ねた電子に貼ると，残存した磁束は1粒子あたり $(1/N)\Phi_0$ なので，平均場近似では $\nu = N/(2kN+1)$ 分数量子ホール状態は複合フェルミオンの $\nu = N$ 整数量子ホール状態ということになる．この系列（図6）は，実験をよく説明する．

2次元空間では粒子の世界線の巻き数が良い量子数になる，と前節で述べたが，このことはまた様々に面白い見方を可能にする．その一つは，「電荷–磁束双対性（charge-flux duality）」である．2次元系に荷電粒子と磁束が共存するとき，電荷と磁束とを交換しても理論は不変となる．これは，2次元では，粒子と磁束の世界線が絡み合うときにのみAB効果（より一般にはBerryの位相）が生じるが，世界線が絡み合うときに作用積分がピックアップする位相だけが問題となるから，粒子と磁束を入れ換えても問題は同じことになる．この双対性を用いて，分数量子ホール効果の階層構造を説明することもできる．

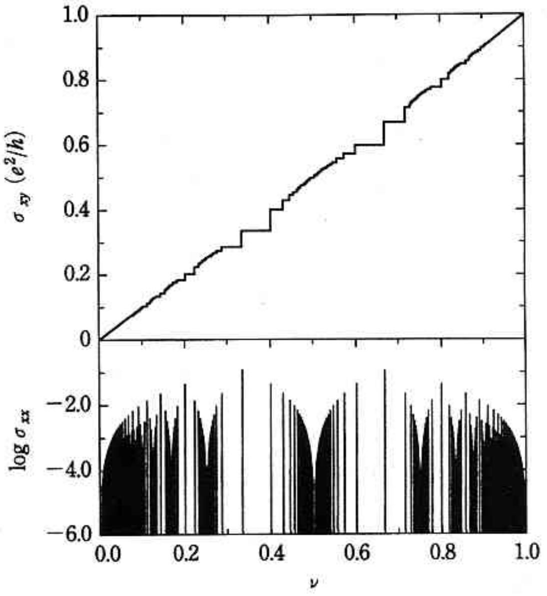

図6　平均場近似では $\nu = N/(2kN \pm 1)$ 分数量子ホール状態は，各電子に $2k$ 本の磁束量子を貼りつけた複合フェルミオンの $\nu = N$ 整数量子ホール状態と見なせる．これから期待されるホール伝導度 σ_{xy} と縦（電場方向）伝導度 σ_{xx} の量子化系列を示す．

さて，2節の最後一寸触れたように，超流動体や超伝導体が持つ長距離秩序は特別なものであり，それらが「巨視的量子現象」である[26]．ボース凝縮状態に特有な秩序は，ボース場の演算子 Φ で表される密度行列（場の同時刻2点相関）

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \langle\, \Phi(\boldsymbol{x})\, \Phi^{\dagger}(\boldsymbol{x}')\,\rangle$$

により表される．ボース凝縮状態では，この量は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ がどんなに離れても，粒子密度と同程度

の有限の大きさにとどまる（すなわち，場に長距離相関がある）．これは普通では考えられない特殊な状況であるが，ボース凝縮系では正に「1つの波動関数」に落ち込んでいるためにこうなる．密度行列の秩序が $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$（非対角成分）に現れることから，この秩序を非対角長距離秩序（off-diagonal long-range order, ODLRO）と呼ぶ．

さて，量子ホール系はフェルミ粒子系であり，電子自身はパウリ原理に阻まれて1粒子状態に凝縮することなどありえない．この点では同じフェルミ粒子系である通常の伝導電子系や液体 ^{3}He の場合も同様であるが，これらの系ではフェルミオンが2個で対を作ることによってボソンのように振舞い，ボース凝縮状態が実現され得る．これに対し量子ホール液体では，生の電子場 Ψ には長距離相関など存在しない．

しかし，複合粒子描像では量子ホール状態を複合ボソンのボース凝縮状態と見なせた．すると，長距離秩序を持ちそうな相関関数は，普通のフェルミオン場ではなく，複合ボソンの場の演算子 Φ に対する

$$\langle \Phi(\boldsymbol{x})\, \Phi^\dagger(\boldsymbol{x}') \rangle$$

であろう．これが正に，ガーヴィンら[27]の指摘したことに対応する．即ち，複合ボソン場の相関関数は，ラフリン状態においては $\langle \Phi(\boldsymbol{x})\, \Phi^\dagger(\boldsymbol{x}') \rangle \propto |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{-1/2\nu}$ という長距離秩序（代数的相関）を持つことが示される．つまり，3次元ボース系のような $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') =$ 一定という長距離秩序は持ちえないが，2次元で許される中では最も長距離的な巾型相関となる．

面白いことに，この巾型相関の指数は，電子相関から生じるにもかかわらず，電子間相互作用の大きさにはよらず，統計的ゲージ場の強さ（$\propto 1/\nu$）にのみ依存する．トポロジカル項とも呼ばれる Chern–Simons 場に起因するので，この秩序はトポロジカルな秩序とも呼ばれる．

複合ボソンを，これとは異なった定式化で定義して，このボソン生成演算子 $A^\dagger$ を N 粒子量子ホール状態と $(N+1)$ 粒子量子ホール状態ではさむと，

$$\langle A^\dagger(\boldsymbol{x}) \rangle = O(1)$$

という具合に1のオーダーの期待値を持つようにもできることがリード（Read）によって示されている[28]．こうすると，ボース系においてボース凝縮が有限の秩序パラメータ $\langle \Phi^\dagger(\boldsymbol{x}) \rangle$ に対応したように，$\langle A^\dagger(\boldsymbol{x}) \rangle$ が量子ホール系における秩序パラメータということになる．

さて，以上で主役を演じている磁束を貼り付ける（一様磁場をフィラメントに収縮させる）という操作はかなり強引なものであり，平均場近似などが良いはずはないと一見思われる．実際，$\nu = 1/2$ で無磁場中の複合フェルミオンとなる，といっても，揺らぎの効果は異様に大きいはずである．つまり，揺らぎ $\delta\rho(\boldsymbol{x})$ に伴う統計的ベクトル・ポテンシャル

$$\delta \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \equiv -\frac{m\Phi_0}{2\pi} \int d\boldsymbol{x}'\, \delta\rho(\boldsymbol{x}')\, \nabla\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

の影響は半端ではなかろう．

普通のクーロン相互作用する電子系には一般に，「相互作用が強くても適当なくりこみを行えば，フェルミ面を持つ縮退したフェルミオン系と見なせ，これをフェルミ液体と呼ぶ」というランダウによる伝統的描像がある．最近の強相関系の物理では，この描像が崩れることもあるのではないか，ということが興味の一つになっている．$\nu = 1/2$ の分数量子ホール系では，磁束のベクトル・ポテンシャルの揺らぎという特異な場合にどうなるか，という問題となる．これが特に面白いのは，第2節で説明したように，ゲージ場の横成分は，$\nu = 1/2$ のように対称性が破れていない場合は遮蔽されないので，ゲージ場の長距離相互作用が非フェルミ液体的な振舞いをもたらすかもしれない，という訳である．

但し，このような問題を調べるときに，1粒子グリーン関数だけでなく，応答関数まで注意を払う必要があり，不用意なことをすると Kohn の定理が破れてしまう．Kohn の定理というのは，並進対称な系では重心運動は相対座標とカップルしないことをいう．つまり磁場中の自由電子はランダウ

量子化のためにサイクロトロン・エネルギー $\hbar\omega_c$ を持つ電磁波を共鳴吸収するが，電磁波の波長が十分長いと共鳴は電子系の重心運動だけをピックアップするので，電子間相互作用が存在しても自由電子と同じ共鳴エネルギーを持つ．よって，電荷密度の相関関数（線形応答理論から，この相関関数は系に振動数 ω 波数 q の電磁波をかけたときの光学吸収を表す）を見たときに，相関関数の極（吸収エネルギーに対応）は，q で展開したときに

$$\omega_q = \omega_c + O(q^2)$$

のように，長波長の極限（$q \to 0$）では $\omega_q \to \omega_c$ となっていなければならない．

フェルミオンを磁束付着によりボソンに変換した描像では，分数量子ホール液体がボソンの超流体になるといったが，このアナロジーでは，この ω_q のモードは超流体中に立つ集団励起モードとなる．電気的中性の超流体（例えば液体ヘリウム）では，この集団励起は $q \to 0$（長波長）で q に比例するフォノン的モードとなり，$1/q \sim$ ヘリウムの原子半径ではロトンとよばれる窪みを持つのはよく知られている．これに対し電荷を持った粒子（例えば，いま考えている電子をボソンに変換したもの）の超流体では，このギャップレス・フォノン的モードは有限のプラズモン・エネルギーまで押し上げられる．分数量子ホール効果の詳しい解説は，文献 4, 7) などを参照してほしい．

5. 電荷–スピンの絡みとゲージ場 —スピン波，skyrmion

さて，いままでは無視した電子のスピンはどうなるのだろうか．実は，普通の分数量子ホール液体ではスピンは揃っている．一見，強磁場の中だからスピンはゼーマン・エネルギーを得するために一斉に磁場方向に揃う，と思いたくなるがそういう訳ではない．実は，これは電子間の強い斥力相互作用のためである．電荷の間に働くのはクーロン力だから，スピンとは無関係な力であり，そのためにスピンが揃うなんて変，と思うかもしれないが，決してそうではない．パウリの原理というものがあり，これは平行スピン間のみに働き反平行スピン間には働かないから，これによりスピン状態は，粒子が相互作用する様子を支配して，結果的にスピン依存の相互作用となる．早い話が，スピンが完璧に揃っていれば電子同志は同一位置に全く来られず，斥力相互作用のためにエネルギーを損することは回避できる．これが真の最低エネルギーを与えるなら，基底状態ではスピンが揃っているであろう．分数量子ホール液体が正にこうなっている．勿論ゼーマン・エネルギーは現実には存在するが，これは代表的なクーロン・エネルギーの数パーセントにすぎないし，ゼーマン・エネルギーをゼロと仮定した理論結果や，磁場を 2 次元面から傾けてゼーマン・エネルギーとクーロン・エネルギーの比を変える実験によっても確認されている．

このスピンが揃った状態は，スピン回転対称性を自発的に破った状態だから，対称性を回復させるための南部–ゴールドストーン・モードが立つ．これは強磁性スピン波モードに他ならない．これに対しても複合粒子描像を適用することができる[29,30]．スピン波の「固さ」（揃ったスピン達を捻るのに必要なエネルギー）は，電子間の交換相互作用で決まっているが，量子ホール系ではランダウ量子化された波動関数の間の交換相互作用である．ランダウ準位が丁度詰まっている場合（整数量子ホール状態）では，スピン波の固さは，超流動ヘリウムのファインマン理論をランダウ波動関数のスピン自由度に拡張して計算される．これを分数量子ホール状態に拡張するには，電子に磁束を貼りつければよいが，すると図 4 のように磁束付き電子同志の相互作用 $\tilde{V}_m$ は弱くなる．磁束を貼ると他の電子は遠ざかる（相対角運動量 m が大きくなる）ので，クーロン斥力が弱くなるのである．ランダウ準位が整数個詰まっている場合には，超流動ヘリウムのフォノン・ロトン集団励起に対するファインマンの理論を量子ホール系のスピン自由

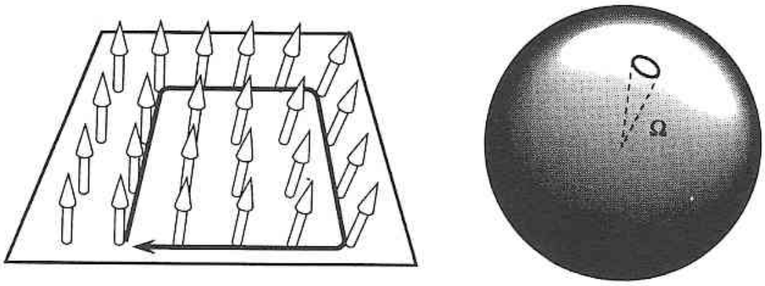

図 7　スピンが揃っていなくて捻れていると，粒子をある経路にそって動かしたとき（左図）に獲得する Berry の位相は，その経路にそったスピンの方向 $\boldsymbol{m}$ を単位球面上にプロット（右図）したときに描く立体角 Ω（の 1/2）になる．

度に適用できるが，複合粒子像によりこれを分数量子ホール状態に拡張したことになる．最近では，オックスフォードのグループ等により実験的にもこのスピン波の分散が光の非弾性（スピン・ラマン）散乱により観測されるようになって[31]，理論と比較されている．

ランダウ準位が丁度詰まっている場合も電子相関の効果でスピンは揃うが，詰まり方を整数からずらすと，スピン強磁性は急速に壊れる．最近では，これが系の素励起である skyrmion で記述されている．これは，次のようなことである[32]．先ず上で述べたスピンの固さ ρ_s は，スピンの方向 $\boldsymbol{m}$ が空間的に揺らぐとエネルギーが上がるが，その比例係数

$$\mathcal{L}_{\rm spin} = \frac{1}{2}\rho_s \int d\boldsymbol{r}(\nabla \boldsymbol{m})^2$$

に他ならない．

これ以外にも，スピン自由度が存在するときに粒子が歩き回ると，Berry の位相をピックアップしてしまう．具体的に，スピンが揃っていなくて捻れているとき，粒子をある微小な経路にそって動かしたときに獲得する Berry の位相は，その経路にそったスピンの方向 $\boldsymbol{m}$ を単位球面上にプロットしたときに描く立体角（の 1/2）になる（図 7）．この立体角 Ω は，経路が微小のときには，$\boldsymbol{m}$ の変化の仕方の「曲率」（場の理論では skyrmion 密度といわれる量）で表され，

$$d\Omega = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{m}\cdot\partial_\mu \boldsymbol{m}\times\partial_\nu \boldsymbol{m} dxdy$$

となる．

この位相の起源が Berry 位相なのか AB 効果なのか電子は区別しないから，磁束 $\Phi = (\Omega/4\pi)\Phi_0$ があるための AB 効果により発生したと思うと，量子ホール系には特徴があって，磁束を入れるとそこに電荷が流入する（図 8）．実際，ランダウ準位占有率 ν がこの系を特徴付けるが，ν は磁束量子 Φ_0 1 本当たりの電子数であることを思い出すと，この占有率を一定に保つためには，磁束量子を 1 本突き通す毎に電荷を νe だけそこに注入することになる．

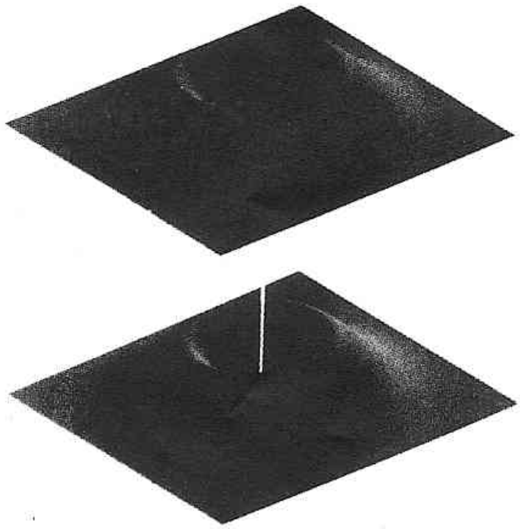

図 8　量子ホール系では，磁束を入れるとそこに電荷が出入りする．この図では，基底波動関数が磁束（白線）を入れると中心に向かって縮む様子を示す．

結局，スピンの揺らぎに付随したこの電荷

$$\delta\rho = -\frac{\nu e}{8\pi}\epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{m}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{m}\times\partial_\nu\boldsymbol{m}$$

の相互作用があり，有効ラグランジアンには

$$\mathcal{L}_{\mathrm{skyrmion}} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{q}}\frac{2\pi}{q}\delta\rho_{-\boldsymbol{q}}\delta\rho_{\boldsymbol{q}}$$

が付け加わる．

このように，一見電荷だけを問題にすればよさそうな量子液体においても，ゲージ場から発生するBerryの位相により，スピンを考えることが本質的となる．考えてみればフェルミオン系は，スピンと統計の関係により必ずスピンを持たねばならないから，スピンの影響を考慮することはフェルミオン系においては不可欠ということになる．

6. おわりに — トポロジカル励起，AB vs Berryの位相，メゾスコピックス

量子ホール系について詳しく説明したが，磁場のない2次元強相関系においても，ゲージ対称性が自発的に破れた状態を考えることも可能である[7]．強相関極限では同一の原子上に2個の電子は来られないので，どの原子も上向きスピン↑，下向きスピン↓または正孔（ホロン）のいずれかを持つ．このとき，スピン励起（スピノン）の生成演算子 $S^\dagger_{i\sigma}$，ホロンの生成演算子 $h^\dagger_i$ を局所ゲージ変換して，$e^{-i\phi_i}S^\dagger_{i\sigma}$，$e^{-i\phi_i}h^\dagger_i$ としてもハミルトニアンは不変となる．もしこのゲージ対称性が自発的に破れればスピノンやホロンの超流動ということになる．

さらに時間反転対称性が破れることも許した場合「磁束相（flux phase）」という状態が一頃考えられたことがある．つまり，外部磁場がないのに電子相関の故に時間反転対称性が自発的に破れる可能性であり，そこでもChern–Simons場で記述することができる[7]．この相では，自発的環状電流が特定の向きに流れているので，時間反転が崩れている訳である．いまでは，このような相が基底状態になることはないようであると考えられている．

さて，フェルミオンとボソンの間の変換を2次元空間の専売特許のように説明したが，1次元空間でも，$S=1/2$ を持つボソンの教科書的な例がある．鎖状に1次元に並んだスピンに対して，スピンとスピンの間に $J\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j (J>0)$ という隣合うスピンを反対向きにするような相互作用を持つ反強磁性ハイゼンベルク模型を考えよう．これは $CuCl_2$ 等の1次元的物質で実現される．このとき，低次元程大きくなる量子揺らぎのために，基底状態は単純な ↑↓↑↓ $\cdots$ という状態では有り得なく，長距離秩序を持つ反強磁性体ではないが，$\langle\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+R}\rangle$ というスピンの2点相関をみると，$1/R$ のように距離の巾でゆっくり減衰する．この意味で，1次元で許される範囲で頑張った反強磁性体である．この状態からのスピン波励起はどうなるだろうか．実は，量子揺らぎのせいで長距離秩序は崩れているにもかかわらず，スピン波モードが存在することがデクロワゾー・ピアソン（des Cloizeaux–Pearson）により見いだされている．スピンを励起するには，スピンを1個反転させてやればよいから，↓$(S=-1/2)$ が ↑$(S=1/2)$ になったと思うと $S=1$ の励起のように一見思えるが，実はこの励起は $S=1/2$ のスピン波（ボソン），より正確にはキンク（位相励起，phason）の対から成る[33]．つまり，スピン1/2のボソンである．

実は，1次元でのキンク励起，空間2次元での渦糸励起，空間3次元でのskyrmion励起は皆トポロジカルな構造（皆，ある点回りの巻き数（winding number，整数）を持つ）という点で共通しており，ひとまとめにしてトポロジカル励起と呼ぶこともできる．実際ウィーグマン（P. Wiegmann）は，ロンドン方程式から出発するアプローチを一般化して，トポロジカル超伝導と彼が呼ぶ理論を展開している[34]．実際，数学的にもゲージ場理論とトポロジーは密接な関連がある[35]．

トポロジカルという点では，物性物理におけるトポロジカルな欠陥，つまり転位（dislocation）や回位（disclination）のように，粒子の走る舞台そ

のものがトポロジカルに面白い構造をしているときに，これをゲージ場で定式化するという試みもある[36].

また，以上で何カ所かで触れたBerryの位相も，物性物理の他の様々な場面でも重要な役割を果たす[8,37~39]．最近では，多体相互作用する系に磁束を通し，多体波動関数がどのように変化するか，という多体系でのAB効果にも興味が持たれている．特に，超伝導の基本単位となるクーパー対の形成が，多体系のAB磁束への応答性から検出できるかどうかが興味深いが，普通はこれは単に電荷の単位が e から $2e$ になること（異常磁束量子化）で検出するが，実際はこのテストは紛らわしいことが多く，系全体を巻き込む長周期の応答性を見ることがより敏感なテストとなることが草部・青木により示されている[40]．多体系の固有エネルギーはAB磁束の関数であるが，様々な準位が交差したり反発したりすることと関連しており，これを，多体波動関数（数学的にはヒルベルト空間内のファイバー束）に付随した仮想的なゲージ場を反映したBerryの位相と見ることもできる[41]．上で電子がBerryの位相とAB効果を区別しないことに触れたが，Aharonov等はBerryの位相とAB効果があらわに共存する場合の物理を最近論じている[42]．

最近では，メゾスコピック系（ミクロとマクロの中間である系）に強磁場をかけたときに，このメゾスコピック分数量子ホール系に色々と面白い物理現象があることが見いだされている．例えば量子ドット中に閉じこめられた分数量子ホール系では，特定の（魔法数の）全角運動量でエネルギーが安定化する．これはKohnの定理により普通は残念ながら光学吸収で観測はできないが，二重量子ドットにすれば観測されることが提案されている[43]．また有限幅を持つ量子細線での端状態にも興味が持たれている．このような系でのChern–Simons理論[44]や複合粒子理論[45]がどうなるかも調べられ始めている．

Weylで始めた話なので，最後もWeylで締めくくると，彼には "Symmetry" という好著[46]が

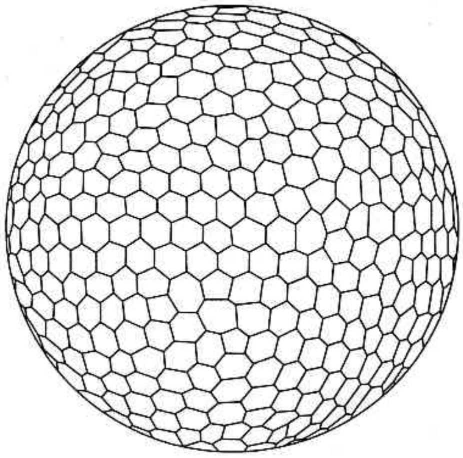

図 9　放散虫（原生動物）の酸化シリコン骨格（Weyl: Symmetry[46] 中の図に基づき再描）．

ある．これを見ると，空間を並進させたときの対称性が彼の執着であったことがわかるが，中には今日のフラレンを予見させるような図（図9）もある．考えてみると球面状のフラレンも，六角格子に五角形というトポロジカルな欠陥を入れて作られたものである．ゲージ場はいまや80歳の年配となったが，この先の発展がますます楽しみという感じである．

参考文献

1) C. Reid: Hilbert (Springer, 1996).
2) 一松信：ヒルベルト数学の問題（共立出版，1969）.
3) 数学セミナー「ヒルベルト23の問題」特集（1994年2月号）.
4) 安藤恒也（編）：量子効果と磁場（丸善，1995）；吉岡大二郎：量子ホール効果（岩波書店，1998）；中島龍也，青木秀夫：多体電子論 III 分数量子ホール効果（東大出版会，1999）.
5) 量子ホール効果の歴史については青木秀夫：数理科学 1994年5月号 p.17（別冊数理科学「現代物理の展開」(1997) p.117に再録）；植村泰忠：数理科学 1994年9月号 p.66 別冊数理科学「20世紀の物理学」(1998) p.169 に再録を参照.
6) 福山秀敏：固体物理 **25** (1990) 790; 久保木一浩，数理科学 1996年1月号 p.59.
7) 青木秀夫，川上則雄，永長直人（編）：物理学論文選集「物性物理における場の理論的方法」（日本物理学会，1995）；永長直人：物性論における場の量子論，電子相関における場の量子論（岩波書店，1995, 1998）.
8) 青木秀夫：数理科学 1991年11月号 p.11 および本別冊 p.107.
9) K. Kusakabe and H. Aoki: *Phys. Rev.* B **44** (1991) 7863.

10) 草部浩一，青木秀夫：多体電子論 I 強磁性（東大出版会，1998）.
11) B. Douçot and X.G. Wen: *Phys. Rev.* B **40** (1989) 2719.
12) 例えば和達三樹：微分・位相幾何（岩波書店，1996）.
13) 青木秀夫：固体物理 **26** (1991) 913.
14) H. Aoki: *J. Phys.* C **17**, 1875 (1984).
15) H. Akera *et al*: *Physica* B **184**, 337 (1993); 明楽浩史：固体物理 **27** (1992) 955.
16) K. Kuroki and H. Aoki: *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4400 (1996); *Phys. Rev.* B **56** (1997) R14287; 黒木和彦，青木秀夫：多体電子論 II 超伝導（東大出版会，1999）.
17) Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics Vol.4, *Quantum Electrodynamics* 2ed. (Pergamon, 1982), §25.
18) T.H.R. Skyrm: *Proc. Roy. Soc.* A **260** (1961) 127.
19) P. Hasenfratz and G. 't Hooft: *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976) 1119.
20) Z.F. Ezawa, M. Hotta and A. Iwazaki: *Phys. Rev.* B **46** (1992) 7765.
21) 例えば青木秀夫：科学 **61** (1991) 388. 分数統計は 1 次元空間でも「分数排他統計」と呼ばれる拡張により考えられており，これについては例えば加藤雄介，倉本義夫，固体物理 **31**, 117 (1996).
22) F. Wilczek: *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity* (World Scientific, 1990).
23) P.A.M. Dirac: *The Principles of Quantum Mechanics* 3rd ed. and 4th ed. (Oxford University Press, 1947, 1958).
24) K. Shizuya: *Phys. Rev.* B **45**, 11143 (1992); 静谷謙一：数理科学 1996 年 1 月号 p.39.
25) 青木秀夫：数理科学 1996 年 1 月号 p.46.
26) C.N. Yang: *Rev. Mod. Phys.* **34**, 694 (1962).
27) S.M. Girvin and A.H. MacDonald: *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1252 (1987).
28) N. Read: *Phys. Rev. Lett.* **62**, 86 (1989).
29) T. Nakajima and H. Aoki: *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3568 (1994).
30) 中島龍也・青木秀夫：日本物理学会誌 **50** (1995) 725.
31) H.D.M. Davies *et al*: *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 4095.
32) S.M. Girvin and A.H. MacDonald in *Novel Quantum Liquids in Low-Dimensional Semiconductor Structures* ed. by S. Das Sarma and A. Pinczuk (Wiley, 1995).
33) L.D. Fadeev and L.A. Takhtajan: *Phys. Lett.* **85A**, 375 (1981).
34) P. Wiegmann in *Field Theory, Topology and Condensed Matter Physics* ed. by H.B. Geyer (Springer, 1995) p.177.
35) 例えば深谷賢治：ゲージ理論とトポロジー（シュプリンガー・フェアラーク東京，1995）を参照.
36) 例えば V.A. Osipov: *J. Phys. Condens. Matter* **7**, 89 (1995).
37) M.V. Berry: *Proc. Roy. Soc.* **A392** (1984) 45.
38) F. Wilczek and A. Shapere (eds): *Geometric Phases in Physics* (World Scientific, 1989).
39) 倉辻比呂志：パリティ **3**, No.9, p.26.
40) K. Kusakabe and H. Aoki: *J. Phys. Soc. Jpn* **65**, 2772 (1996); R. Arita *et al*, *ibid*, **66** (1997) 2086.
41) V.E. Korepin and A.C.T. Wu: *Int. J. Modern Phys.* B **5** (1991) 497.
42) Y. Aharonov *et al*: *Phys. Rev. Lett.* **73**, 918 (1994).
43) H. Imamura, P.A. Maksym and H. Aoki: *Phys. Rev.* B **53**, 12613 (1996).
44) N. Nagaosa and M. Kohmoto: *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4294.
45) J.K. Jain and T. Kawamura: *Europhys. Lett.* **29**, 321 (1995).
46) H. Weyl: *Symmetry* (Princeton Univ. Press, 1952, 1980 にも再発行).

（あおき・ひでお，東京大学大学院理学系研究科）