

超伝導への傾注 — 物性物理とハドロン物理から

青木 秀夫・初田 哲男

1. はじめに

超伝導は、南部理論の発祥の地であり、すでに多くのことが語られています。筆者の青木^{1,2)}、初田³⁾も幾つかの解説をしています。特に本稿では、それらではあまり詳しく触れられなかった、以下の二点を眼目として解説したいと思います。第一は、超伝導の本質であるマイスナー効果とゲージ不変性に関する問題です。これをミクロに扱うために、南部先生の1960年の論文⁴⁾では、「電磁場のポテンシャルも含めた場の理論を構成すると、マイスナー効果もゲージ不変に議論できる」という視点が議論されており、これを簡単に解説します。第二は、青木が専門とする物性物理学における超伝導⁵⁾と、初田が専門とするハドロン物理学におけるカラー超伝導⁶⁾の比較です。何故、物性とハドロン物理かということ、超伝導は、南部理論の言うゲージ対称性の自発的破れ (spontaneous symmetry breaking, SSB) の代表的な現象であり、普通は巨視的な物質で起きるので、固体物理の範疇です。しかし、超伝導は普遍的な現象なので、超伝導固体のエネルギースケールとは桁違いのクォーク物質 (例えば中性子星の中心部など) でもカラー超伝導と呼ばれる超伝導状態が可能であると考えられています。ゲージ対称性の自発的破

れという点では、超伝導固体とカラー超伝導クォーク物質は共通していますが、もちろん相違点もあり、これを比べてみたいと思います。

超伝導や超流動、あるいはそれに類似した現象は、例えばレーザー冷却された原子系や、分数量子ホール系でも起きますが、本稿では固体とクォーク物質に焦点を絞ろうと思います。ミクロな観点からは、物性での超伝導では、固体に対するハミルトニアンをBCS理論で扱います。ハドロン物理でのカラー超伝導では、クォーク系に対するハミルトニアンをQCD (量子色力学) で扱います。

2. マイスナー効果とゲージ対称性の破れ

南部先生が超伝導の問題に興味をもって、特に1960年頃にゲージ対称性に関する仕事をされた頃は、超伝導のBCS理論 (1957年) が出た数年後です。できたてのホヤホヤのこの理論は、現在ですら、最初に勉強するときは色々奇妙なところがあり、ギョッとさせられます。いわんや当時は、斬新な理論という印象を与えたことは想像に難くありません。超伝導の本質は、ゼロ抵抗というよりはマイスナー効果という、超伝導体がもつ完全反磁性 (外部磁場を完全に排除する効果) にありますが、この効果は以下で見るように、ゲージ不変性

という、どんなゲージ場でも、普通は守ってほしい性質を露に破っているのが、奇妙です。現象論的には、BCS理論が出る以前のロンドン方程式というものが既にゲージ不変性を破っています。超伝導を、現象論ではなくミクロに扱う理論がBCS理論ですから、先ず知りたいのは、破れたゲージ不変性はこの理論ではどうなるのか、ということです。これに関連して、ゴリコフ(1958-59年)は、ミクロなBCS理論に、超伝導基底状態からの準粒子というものを記述したボゴリューボフの理論を融合させた上で、超伝導に対するギンツブルグ-ランダウ理論を構成しました。この理論は、一般に、対称性の破れを伴う相転移を扱う現象論です。これでもなお、マイスナー効果とゲージ対称性の関係がよく分からないのですが、南部先生が行ったことは、電磁場のポテンシャルも含めた場の理論を(電荷保存を保証するウォード(Ward)-高橋恒等式というものに注意しながら)構成すると、マイスナー効果もゲージ不変に議論できる、という視点を与えたことです⁴⁾。つまり、超伝導体におけるゲージ不変性は、意外に面倒な議論をしないと分からず、「隠れて」いるという訳です。教科書では、例えば⁷⁻⁹⁾が、このあたりをちゃんと紹介しています。これらのいくつかは、(BCS以降の)超伝導の教科書としては大変初期に属するものですが、それだからこそ、この点を不思議なことと感じて、真剣に論じたのだらうとおもわれます。

それでは、南部先生の1960年の論文の骨子を簡単にみましょう。先ず、超伝導体の基底状態に対するミクロなBCS理論、およびそれに基づいたボゴリューボフの理論の要は、超伝導体が、電子と正孔を混ぜた状態の集合と見なせる(ハミルトニアンを対角化する)ので、結果としてゲージ対称性を破っているということです。別の言葉では、BCS状態では、波動関数の位相が確定するという意味でゲージ対称性が破れるのですが、これ

は(位相と共役な量である)粒子数が不定な状態だから可能となった訳です。普通は不定であるべき位相が確定したために、ゲージ不変性(位相はどのようにとっても構わないという性質)は破れてしまいます。

ロンドン方程式は、超伝導体内の電流 J と、外部からかける磁場 B (これをベクトル・ポテンシャル $B = \text{rot}A$ で表します) との関係を与えるものであり、

$$J_i(\mathbf{q}) = K_{ij}(\mathbf{q})A_j(\mathbf{q}),$$

$$K_{ij}(\mathbf{q}) = -\frac{e^2}{m}\langle 0|\rho|0\rangle\delta_{ij} + \sum_n \left(\frac{\langle 0|j_i(\mathbf{q})|n\rangle\langle n|j_j(-\mathbf{q})|0\rangle}{E_n} + \text{h.c.} \right)$$

で与えられます。ここで、 q は、フーリエ変換したときの波数、 $i, j = 1, \dots, 3$ は空間座標軸のラベル、繰り返された添字については和をとり、 (ρ, j) は電荷密度 ρ と電流密度からなる4元ベクトル、 $|0\rangle$ は超伝導状態です。問題は、カーネルといわれる K ですが、電流の縦波(ここでは長波長極限 $q \rightarrow 0$ を考える)が立つと、集団励起をひきおこすので、上式右辺第二項はゼロではなく、これが第一項とキャンセルします。電流の横波成分については第二項はゼロとなるので、第一項が残り、 $J \propto A$ というロンドン方程式となります。この方程式は、ベクトル・ポテンシャルに露わに依っているので、勿論ゲージ不変性(物理量が、任意性をもつベクトル・ポテンシャルの取り方に依存してはいけないという性質)を尊重していません。

系のハミルトニアンとしてはBCS型にとり、普通はボゴリューボフ理論に従い、超伝導を表す平均場も考えて平均場近似をするのですが、ここで注意しなければならないのは、このような平均場がゼロでという近似をすると、ゲージ不変性を破ってしまいます。つまり、ボゴリューボフは電子と正孔の混ざったものなので、不用意なことを

すると電荷保存則は容易に破れます。南部理論はこれを常に注意しながら行い(かつ、電子・フォノン系まで考え、これらの自己エネルギーまでゲージ不変に扱って)定式化すると、全てゲージ不変にできる、ということを示したのです。

南部先生が対称性の自発的破れについて示したのは、ゲージ対称性を自発的に破った状態では、これを、いわば部分的に解消するために、南部・ゴールドストーンモードという集団励起モードが立つ(破れていない方向に少し近づくために有る種の波が立つ)、ということです。このモードは、ゼロ質量の(長波長極限 $q \rightarrow 0$ で励起エネルギーが 0 となる)モードです。但し、これは電荷をもっていない粒子の超伝導状態、つまり超流動体における話であり、現実の超伝導体は、電子という、負電荷をもった粒子の集合です。この場合には、南部・ゴールドストーンモードはゼロ質量ではなく、有限質量に(励起エネルギーにギャップが開くように)なります。これは大まかに言うと、次のようなことです。自発的に破れた対称性が、ゲージ変換のように局所的な変換(例えば、場所 r の関数 Λ を用いた変換 $\psi \rightarrow \psi e^{i\Lambda(r)}$)に対する対称性の場合には、南部・ゴールドストーン定理が成り立つ必要はなく、有限質量のモードが立つことが可能となります。この現象をアンダーソン・ヒッグス機構と呼び、このモード(縦モード)はヒッグス・モードと呼ばれます。

最も馴染み深い電子気体の例で云うと、電子の間のクーロン力はゼロ質量のボソンである光子の場が媒介しますが、この系の縦集団励起モードはプラズモンです。プラズモンの分散はゼロから立ち上がるのではなく、有限の値(プラズモン・エネルギー)から立ち上がります。プラズモンは電子のモードのように見えますが、光子と電子は結合して光子のモードとも言え、光子がアンダーソン・ヒッグス機構によりギャップをもつ励起モー

ドを得た例とも言えます。このヒッグス・モードは、NbSe₂ といった典型的な超伝導体で観測されています。

このように、超伝導体では集団励起モードが立ちますが、いずれにせよこれは超伝導の本質である BCS 状態という、一種のボース・アインシュタイン凝縮体の位相が波立つモードであり、位相モードと呼ばれています。一般に、固体の電子は、バンド構造と呼ばれる分散関係(エネルギーと波数の関係)をもち、何枚ものバンドから成ります。超伝導は、このうち一枚のバンドのみが関与して起きる場合もありますが、一般には複数のバンドが超伝導に寄与することもあります。我が国で発見された、MgB₂ という有名な超伝導体が典型例です。この場合、多バンドに亘りゲージ対称性が破れるという点で面白い訳ですが、位相モードにも面白いことが起き、複数の位相モードが生じることが知られていて、一本目は二種類ある超伝導成分が同期して振動する波、二本目は二種類の超伝導成分が互いに逆向きに振動する有限質量の波です。これはレゲット(2003年にノーベル物理学賞)が1960年代に日本に滞在中にした仕事です¹⁰⁾。レゲットモードは、MgB₂ において検証実験も行われています。バンドの数が3(あるいはそれ以上)の場合の超伝導体では、複数個のバンド間ジョセフソン電流が存在するため、これらの電流が強め合う場合と相殺する場合が存在し、このような集団励起が多バンド超流動/超伝導を特徴付けるという示唆があります¹¹⁾。最近一大フィーバーになっている、鉄系新超伝導体¹²⁾も、5バンド系で、そのうち3本が超伝導に関与していると考えられています¹³⁾。

冷却原子系でも複数の種類の粒子の凝縮が考えられています。カラー超伝導では、後述するように異なる種類(フレーバー)を持つクォークが複数の凝縮を引き起こします。

3. 強い相互作用における自発的対称性の破れ

次にハドロン系に移りましょう。1961年に発表された南部・ヨナラシニオの古典的論文¹⁴⁾では、超伝導のBCS理論におけるゲージ対称性と強い相互作用におけるカイラル対称性の類似性をもとに、素粒子の質量生成機構が提唱されています。それでは、このカイラル対称性とは何でしょうか。強い相互作用の基礎理論である量子色力学(QCD)で3種類のクォーク(u, d, s)の質量を無視すると、 $\mathcal{G} = \text{SU}(3)_C \otimes \text{SU}(3)_L \otimes \text{SU}(3)_R \otimes \text{U}(1)_B$ なる対称性が現れます。ここで、 $\text{SU}(3)_C$ はカラーゲージ対称性、 $\text{SU}(3)_L$ と $\text{SU}(3)_R$ はそれぞれ左巻きクォーク q_L と右巻きクォーク q_R を独立に回転させるカイラル対称性、 $\text{U}(1)_B$ はバリオン数保存に関係する対称性です。

さて、クォークの化学ポテンシャルが小さい場合のQCD真空状態では、 \mathcal{G} の一部である $\text{SU}(3)_C \otimes \text{SU}(3)_{L+R} \otimes \text{U}(1)_B$ のみが対称性として残っています。(L+Rは、 q_L と q_R を同位相で回転させる対称性です。)これがカイラル対称性の自発的破れです。この時には、真空中にクォーク-反クォーク・ペアの凝縮が起こります。一方、中性子星の中心部のようにクォークの化学ポテンシャルが大きい場合には、 \mathcal{G} の一部である $\text{SU}(3)_{C+L+R}$ (カラーゲージ対称性とカイラル対称性が絡み合った部分群)が対称性として残ります。この時には、異なるフレーバー(u, d, s)とカラー(r, b, g)を持ったクォーク-クォーク・ペアの凝縮が起こります。

物性物理においては、電子間相互作用の効果(例えば超伝導への転移)は、解析的手法や量子モンテカルロ法、動的平均場理論、密度行列繰りこみ群法といった数値的手法を用いて調べられています。QCDにおいては、格子QCD計算と呼ばれる強力な第一原理的手法がありますが、クォークの化学ポテンシャルが大きい高密度領域では、負

符号問題と呼ばれる困難のために適用できません。従って、QCDの低エネルギー有効理論としての南部・ヨナラシニオ模型の有用性は超伝導におけるBCS模型と同様にいまだ衰えを知りません¹⁵⁾。

さて、固体の超伝導状態においては、電子の準粒子(ボゴリューボフ)スペクトルにギャップが生じます。この準粒子ギャップとディラック粒子の質量ギャップの類似に着目することで、南部先生はフェルミオン質量の動的生成の概念に到達したわけ¹⁴⁾です。ここで、相対論的なスピン1/2のフェルミ粒子が従う一般の分散関係を考えてみましょう。フェルミオンを表すスピノル場 $\psi(x)$ とそれを荷電共役変換した場 $\psi^C(x)$ を一つにまとめて、 $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^C \end{pmatrix}$ という2成分フェルミオン場を導入すると便利です(これは南部・ゴリコフ表示と呼ばれます⁴⁾)。このフェルミオン場が化学ポテンシャル μ を持つ場合の運動項の一般形は、

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \begin{pmatrix} i\partial\!\!\!/ + \mu\gamma_0 - M & \Delta\gamma_5 \\ -\Delta^*\gamma_5 & i\partial\!\!\!/ - \mu\gamma_0 - M \end{pmatrix} \Psi$$

のように表せます。ここで、 γ はガンマ行列です。 M と Δ をそれぞれディラック質量とマヨラナ質量と解釈することができます。特に、フェルミオン間相互作用の結果 M や Δ が自発的に生成される場合があります。このとき、(1)式を対角化して得られる準粒子エネルギーは、

$$\omega_{\mp}(\mathbf{p}) = \left[(\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} \mp \mu)^2 + |\Delta|^2 \right]^{1/2}$$

となります。 ω_- と ω_+ は、それぞれ粒子と反粒子のスペクトルです。QCD真空中のクォーク準粒子は、 $M \neq 0$ かつ $\Delta = 0$ 、高密度クォーク物質中のクォーク準粒子は $M = 0$ かつ $\Delta \neq 0$ という状況に対応し、後者ではフェルミ面にギャップ Δ が現れます。

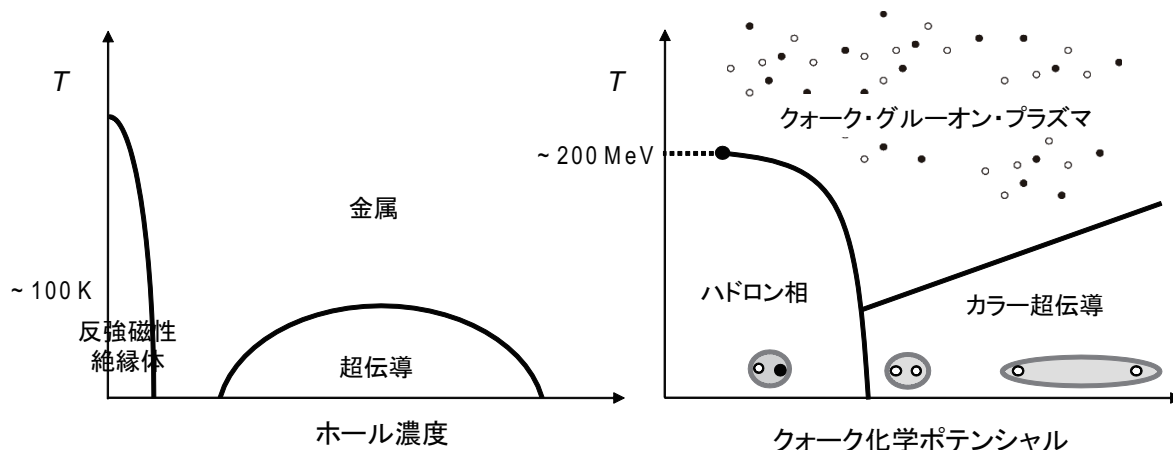


図 1 高温超伝導体の相図 (左) と、QCD の相図 (右)。

4. 物性における超伝導とハドロン系におけるカラー超伝導

最後に、物性における超伝導とハドロン系における超伝導を比べて、両者の似ている点と違う点を概観してみましょう。

それには、まず相図を見てみましょう。図 1(a) には、固体における銅酸化物高温超伝導体の有名な相図を掲げてあります。横軸は、フェルミオンの密度で、今の場合は、酸化物 (元々は絶縁体であり、反強磁性体) に、別の元素を混ぜることにより電子数を変えた (実際には、電子を抜くので、正孔の密度を増やす) 場合の正孔の密度です。縦軸は温度で、フェルミオン密度を増やすにつれ、反強磁性が消え、その後超伝導転移温度 T_C が上昇する様子が描かれています。

一方、QCD の相図一例が図 1(b) です。この場合、横軸はクォークの化学ポテンシャル μ であり (μ が大きいほどクォークの密度が増える)、縦軸は温度です。QCD における特徴的な 3 つの相は、

低温低密度でのハドロン相、高温でのクォーク・グルーオン・プラズマ相、低温高密度でのカラー超伝導相です。ハドロン相では、クォーク-反クォーク・ペアの凝縮が発現し、クォークはディラック型の質量 M を獲得します。一方で、カラー超伝導相では、クォーク-クォーク・ペアの凝縮が発現し、クォークはマヨラナ型の質量 Δ を獲得します。

このように、固体における超伝導も、QCD における超伝導も、系を規定するパラメータ (電子密度や、クォークの化学ポテンシャル) を変えるに従い、様々な相が (場合によっては隣接して) 現れます。多体系において様々な相、特にゲージ対称性の破れた状態が現れることは、一般に量子多体系に特徴的なことですが、その現れ方は考える系により違います。物性における相図 (図 1(a)) は、高温超伝導発見から 20 年以上経った今でも、まだ完全には理解されていませんが、基本的には、電子間の斥力相互作用から生じる超伝導であると考えられています。斥力からクーパーペアが生じるといって、直感に反するように思われるかもし

れませんが、実は、斥力からも超伝導は十分発生し得て、この場合クーパーペアを糊付けするのは、スピン揺らぎです。引力相互作用の場合との唯一の違いは、斥力相互作用からは異方的（クーパーペアをなす2電子の相対角運動量がゼロではない）ペアが凝縮した超伝導が発生する、ということです。実際、高温超伝導体は相対角運動量が2という（d波と呼ばれる）超伝導であることが、実験・理論的に確立しています。但し、斥力から超伝導を発生させる代償として、超伝導の T_C は、電子のもつ運動エネルギー・スケールである 1eV （温度に換算して1万度）から2桁も落ちた、絶対温度 100K 程度となります。何故2桁落ちるか、という点については、色々調べられています⁵⁾。

一方、カラー超伝導では、クォークは、グルーオンというゲージ粒子による引力のために、主として等方的な（相対角運動量がゼロの）s波クーパーペアを組みます⁶⁾。

固体における超伝導とカラー超伝導は、関与するエネルギー・スケールが桁違いである（例えば、カラー超伝導の T_C は 100 MeV 程度（温度に換算して1兆度））ということを別としても、様々な違いがあります：

- (i) 固体では、クーパーペアを形成するのは非相対論的な電子であり、かつバンド構造を反映して一般にはフェルミ面は丸くはないが、クォーク物質でクーパーペアを形成するのは相対論的なクォークであり、かつ一様等方なフェルミ液体の構造を反映して主として丸いフェルミ面を持つ。
- (ii) クォークのクーパー・ペアは、グルーオンの磁氣的相互作用がもたらす強い長距離引力により形成される。その結果、相転移温度 T_C とフェルミエネルギー ε_F の比が $T_C/\varepsilon_F \sim 0.1$ に達し、物性の高温超伝導における、 $T_C/\varepsilon_F \sim 0.01$ に比べて1桁高い。

(iii) クォークのクーパー・ペアは、クォークの持つカラー、フレーバー、スピンの組み合わせに対応して、様々な内部状態をとる。たとえば、カラーとフレーバーが絡み合ったカラーフレーバーロッキング状態はその典型例です。

(iv) クォークのクーパー・ペアと結合したグルーオンの熱揺らぎにより、相転移次数が一次になる。上記の (iii) の点については、固体においても、電子はスピンをもつので、スピン・トリプレット超伝導や、強磁性と超伝導の共存、などのスピンの絡んだ面白い現象があります。また、2節で多バンド超伝導について触れましたが、固体でも多軌道系（たとえば鉄系超伝導体）では、いわば多種フェルミオン系になっているので、軌道自由度という内部自由度をもつ超伝導も存在します。但し、もちろん、その様子は、カラー、フレーバーに対するものとは異なるラグランジアンに支配されます。

(iv) の点については、物性における超伝導転移も、普通は、対称性の破れを伴う2次相転移と考え、GL理論を適用するのが教科書的です。しかし、厳密には、電磁場の揺らぎまで考えて、それを繰り込むと、超伝導転移も（弱い）1次転移になるという理論が既に1974年にハルペリン (Halperin) 等により示されているので¹⁶⁾、2次転移かどうかということは自明ではありません。

最後に、超伝導が粒子場の結合定数にどのように依存するかを見てみましょう。図2で、横軸は結合定数 λ であり、物性の超伝導の場合でいえば、例えば電子間の引力相互作用の大きさ U 、ハドロン物理でいえば、QCDの微細構造定数 α_s （但し、これはクォーク化学ポテンシャルの関数）です。縦軸は超伝導の T_C を概念的に描いています。結合が弱い場合は、クーパーペアの空間的サイズは大きく、BCS理論が成立し、 $T_C \sim \exp(-\text{const}/\lambda)$ のように低い T_C となります。一方、強結合では

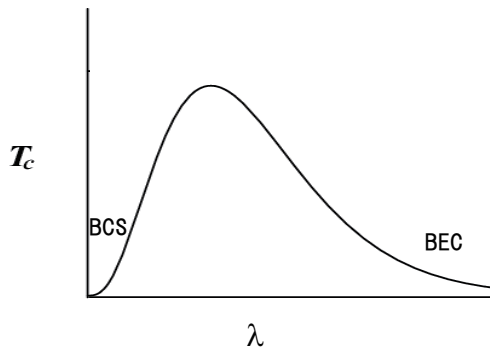


図 2 相転移温度と結合定数 g の関係。

先ず 2 粒子が束縛されて (クーパー・ペアの空間的サイズは小さい) これがボース・アインシュタイン凝縮するという描像になるので、 λ が大きい極限では、一般には自由ボソンの凝縮に対する相転移温度に近づきます (図の引力ハバード模型では、或る事情のために T_C は $T_C \sim 1/U$ のようになりますが)。この両極限の間の移り変わりが、いわゆる BCS-BEC クロスオーバーとなり、冷却原子系ではこの中間にユニタリ極限という面白い点が存在します。

5. おわりに

超伝導が発現する現実の系として、物性における電子の超伝導体は膨大な数が知られており、最近でも、無機物だけでなく有機物も含んで、新超伝導体の発見が毎年のように相次いでいます。また、最近稼働を始めた東海村の大強度陽子加速器施設 J-PARC では、強力な中性子源を用いて固体の中の励起スペクトルがいままでにない程度の精度と早さで求められ、これは高温超伝導体の理解も飛躍的に高めると期待されています。一方、QCD のカラー超伝導を実現している可能性があるのは、中性子星の中心部のような低温・高バリオン密度の環境です。半径 10-20km で太陽の 1-2 倍の質量

を持つ中性子星は、すでに 1000 個以上見つかっており、銀河系内だけでも 10^8 - 10^9 個の中性子星が存在すると予想されています。最近では中性子星の表面でおこる X 線バーストの情報から、かなり高い精度で高密度物質の状態方程式が推定できる可能性が指摘されています。¹⁷⁾ 南部先生により一般化され深化された“超伝導”の概念は、物性物理においてもハドロン物理学においても、新たな現代的展開を生み続けているのです。

参考文献

- 1) 青木秀夫：日本物理学会誌、**64**, 80 (2009).
- 2) 青木秀夫：原子核研究 **53**, Suppl. 3, 183 (2009).
- 3) 初田哲男、原子核研究 **53**, Suppl. 3, 5 (2009).
- 4) Y. Nambu, Phys. Rev. **117**, 648 (1960).
- 5) 青木秀夫：「超伝導入門」(裳華房、2009)。
- 6) K. Fukushima and T. Hatsuda, arXiv:1005.4814 [hep-ph].
- 7) J. R. Schrieffer, *Theory of superconductivity* (Benjamin, 1964).
- 8) G. Rickayzen, *Theory of superconductivity* (Interscience, 1965).
- 9) I.J.R. Aitchison and A.J.G. Hey: *Gauge theories in particle physics*, 2nd ed (Inst. Phys. Publication, 1989).
- 10) A. J. Leggett, Prog. Theor. Phys. **36**, 901 (1966).
- 11) Y. Ota, M. Machida, T. Koyama and H. Aoki, to be published.
- 12) Y. Kamihara, T. Watanabe, M. Hirano, and H. Hosono, J. Am. Chem. Soc. **130**, 3296 (2008).
- 13) K. Kuroki, S. Onari, R. Arita, H. Usui, Y. Tanaka, H. Kontani, and H. Aoki, Phys. Rev. Lett. **101**, 087004 (2008); **102**, 109902(E) (2009); K.Kuroki, H.Usui, S. Onari, R. Arita, and H. Aoki, Phys. Rev.B **79**, 224511 (2009).
- 14) Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); *ibid* **124**, 246 (1961).
- 15) T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rept. **247**, 221 (1994).
- 16) B.I. Halperin et al, Phys. Rev. Lett. **32**, 292 (1974); H. Kleinert, Cond. Matter Phys. **8**, 75 (2005).
- 17) F. Ozel, G. Baym and T. Guver, arXiv:1002.3153 [astro-ph.HE].

(あおき・ひでお, 東京大学大学院理学系研究科)
(はつた・てつお, 東京大学大学院理学系研究科)